Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 33 (1987)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOMOLOGIE DE DEGRÉ TROIS D'ALGÈBRES DE LIE SIMPLES DÉPLOYÉES ÉTENDUES À UNE ALGÈBRE COMMUTATIVE

Autor: Cathelineau, J. L.

Kapitel: 4. Remarques sur le cas de sl(r, A), r 3

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87889

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 26.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Il est alors immédiat que

$$\tilde{L}_3 \circ \tilde{\lambda}_3 = <h_\alpha, h_\alpha> \mathrm{Id}\,,$$

et par suite $\tilde{L}_3$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

En ce qui concerne le calcul du $H_{2,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A)$ on procède de manière analogue, en remplaçant le complexe $(A^*/_{1-X,\,1+Y}, b)$, par le complexe $(A^*/_{1+Y}, b)$, dont l'homologie est $H_*^-(A)$.

Enfin on ramène facilement le cas général au cas déployé; en effet supposons que (L, k) soit une extension galoisienne, de degré fini, telle que $\mathfrak{g} \otimes_k L$ soit déployée sur L. On applique ce que l'on vient de démontrer à la situation:

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k L\,, \qquad A' = A \otimes_k L\,, \qquad \mathfrak{g}'_{A'} = \mathfrak{g}' \otimes_k A' = \mathfrak{g}_A \otimes_k L\,.$$

Pour achever la preuve, il suffit de remarquer que l'on a des isomorphismes

$$H_{*,k}(\mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} [H_{*,L}(\mathfrak{g}_A \otimes_k L)]^{G_{L/k}}$$
$$H_{*,k}(\mathfrak{g}_A, \mathfrak{g}_A) \xrightarrow{\sim} [H_{*,L}(\mathfrak{g}_A \otimes_k L, \mathfrak{g}_A \otimes_k L)]^{G_{L/k}}$$

où $G_{L/k}$ est le groupe de Galois de (L, k): ce groupe est fini et on est en caractéristique nulle.

4. Remarques sur le cas de $\mathfrak{sl}(r, A)$, $r \geqslant 3$

Soit $\mathfrak{sl}(r, A) \simeq A \otimes \mathfrak{sl}(n, k)$, l'algèbre de Lie des $r \times r$ matrices de trace nulle. Explicitons l'isomorphisme

$$\tilde{\mathscr{L}}_3 : H_{3,k}(\mathfrak{sl}(r, A)) \to HC_2(A)\,,$$

induit (pour $r \geqslant 3$), par l'application de [LQ]:

$$\mathscr{L}(a_0 X_0 \wedge a_1 X_1 \wedge \ldots \wedge a_n X_n)$$
$$= (-1)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_\sigma \,\mathrm{Trace}\,(X_0 X_{\sigma(-1)} \ldots X_{\sigma(n)})\,(a_0, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})\,;$$

(L'application L considérée dans le paragraphe précédent ne convient pas ici). On peut écrire

$$\mathscr{L}_3(a_0 X_0 \wedge a_1 X_1 \wedge a_2 X_2)$$
$$= \mathrm{Trace}\,(X_0 X_1 X_2)\,(a_0, a_1, a_2) - \mathrm{Trace}\,(X_0 X_2 X_1)\,(a_0, a_2, a_1)$$
$$= \frac{1}{2}\,\psi(X_0, X_1, X_2)\,((a_0, a_1, a_2) - (a_0, a_2, a_1))$$
$$+ \frac{1}{2}\,\phi(X_0, X_1, X_2)\,((a_0, a_1, a_2) + (a_0, a_2, a_1))$$

où

$$\phi(X_0, X_1, X_2) = \mathrm{Trace}\,(X_0[X_1, X_2])$$

et

$$\psi(X_0, X_1, X_2) = \mathrm{Trace}\,(X_0X_1X_2 + X_0X_2X_1)$$

sont des 3-formes invariantes sur $\mathfrak{sl}(r, k)$, respectivement antisymétrique et symétrique.

Lorsque A est lisse ou un corps extension de k, on sait que

$$HC_2(A) \simeq H^0_{DR}(A) \oplus (\Omega^2_{A/k}/d\,\Omega^1_{A/k})\,;$$

L'isomorphisme ci-dessus s'explicite alors par l'application

$$a_0X_0 \wedge a_1X_1 \wedge a_2X_2 \mapsto \psi(X_0, X_1, X_2)a_0a_1a_2 + \phi(X_0, X_1, X_2)a_0da_1da_2\,.$$

Esquissons une preuve; on note d'abord l'analogue des lemmes 3 et 4. Soit H, E_+, E_-, H', les matrices de $\mathfrak{sl}(r, k)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où M est donné respectivement par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

alors on a:

$(\otimes^3 \mathfrak{sl}(r, k))_{\mathfrak{sl}(r, k)}$ est de dimension 2, engendré par

$$[H \otimes E_+ \otimes E_-] \quad \text{et} \quad [H \otimes H \otimes H']\,;$$

de plus l'application

$$S^3A \oplus \wedge^3 A \to (\wedge^3 \mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r, k)}$$

donnée par

$$a\,.\,b\,.\,c \mapsto [aH \wedge bE_+ \wedge c\,E_-]$$
$$a \wedge b \wedge c \mapsto [aH \wedge bH \wedge c\,H']$$

est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

Une méthode pour prouver cela consiste à utiliser l'argument géométrique suivant sur les systèmes de racines:

Pour un système de racines Δ de base R de type $A_n (n \geqslant 2)$, la plus grande racine est orthogonale à toutes les racines de la base sauf exactement 2.

Enfin on obtient un inverse de $\tilde{\mathscr{L}}_3$ à partir du morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccccc} A^4/_{1-X} & \xrightarrow{b} & A^3/_{1-X} & \xrightarrow{b} & A^2/_{1-X} \\ \mu_4 \downarrow & & \mu_3 \downarrow & & \mu_2 \downarrow \\ \wedge^4(\mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r, k)} & \xrightarrow{d} & \wedge^3(\mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r, k)} & \xrightarrow{d} & \wedge^2(\mathfrak{sl}(r, A))_{\mathfrak{sl}(r, k)} \end{array}$$

$$\mu_2((a_0, a_1)) = \frac{1}{2}[a_0 H \wedge a_1 H],$$

$$\mu_3((a_0, a_1, a_2)) = \frac{1}{2}[a_0 H \wedge a_1 E_+ \wedge a_2 E_-] + \frac{1}{2}[a_0 H \wedge a_1 H \wedge a_2 H'],$$

$$\mu_4((a_0, a_1, a_2, a_3)) = \frac{1}{4}[a_0 E_+ \wedge a_1 E_- \wedge a_2 E_+ \wedge a_3 E_-]$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\sigma \in G} \varepsilon_\sigma [a_{\sigma(0)} H \wedge a_{\sigma(1)} H \wedge a_{\sigma(2)} E'_+ \wedge a_{\sigma(3)} E'_-]$$

où G est le groupe cyclique engendré par le cycle $(0, 1, 2, 3)$, et où E'_+ et E'_- proviennent des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a une approche analogue pour $H_{2,k}(\mathfrak{sl}(r, A), \mathfrak{sl}(r, A))$ $(r \geqslant 3)$.

En écrivant les lignes qui précèdent, l'auteur était motivé par l'homologie des groupes algébriques simples (éventuellement réels). Que connaît-on d'analogue au théorème 1 et 2 dans ce contexte?

La situation pour $SL(r, A)$ est assez bien comprise grâce à la K-théorie algébrique et à l'article récent [G].

Dans le cas des groupes algébriques réels simples, il y a des résultats dans [D], [D-S], [P-S]; en particulier l'analogue de théorème 2 est connu pour $SO(n, \mathbf{R})$, comme conséquence du théorème de Sydler [S].