

# APPROXIMATION DES MOYENNES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

Autor(en): **Reyssat, Eric**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **33 (1987)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-87890>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## APPROXIMATION DES MOYENNES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

par Eric REYSSAT

On discute ici quelques propriétés arithmétiques des moyennes arithmético-géométriques (Mag en abrégé). Les travaux de Gauss sur ces moyennes ont été récemment remis au goût du jour par D. Cox (voir [C1] et [C2]). La définition et les propriétés de la Mag de deux nombres complexes nous permettent d'étendre les résultats de [R1] au cas complexe.

Rappelons brièvement les définitions et propriétés de ces moyennes (voir les détails dans [C1]). Partant de deux réels positifs  $a, b$ , leurs moyennes arithmétique et géométrique forment un nouveau couple  $(a_1, b_1)$ , et l'itération du procédé fournit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par les relations

$$a_{n+1} = (a_n + b_n)/2 \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}.$$

On sait que ces suites convergent très vite vers une limite commune  $M(a, b)$  appelée moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ .

Lagrange avait remarqué l'intérêt de ce procédé très rapide pour le calcul des intégrales elliptiques: étant donnée une courbe elliptique, on en choisit un modèle de la forme:

$$E_\lambda: \quad y^2 = x(1-x)(1-\lambda x).$$

On cherche alors à calculer la « période »  $\omega$  définie par la formule:

$$(1) \quad \omega = 2 \int_0^1 \frac{dx}{y} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \lambda \sin^2 \varphi}} \quad (\text{poser } x = \sin^2 \varphi).$$

Un changement de variables très astucieux (cf. [C1] ou [R1]) permet de montrer que

$$(2) \quad M(1, \sqrt{1-\lambda}) = \pi/\omega.$$

Cette formule permet par exemple de calculer rapidement les valeurs de la fonction  $\Gamma$  reliées aux intégrales elliptiques ( $\Gamma(n/4)$  et  $\Gamma(n/6)$ ). Ainsi

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - x}} = \Gamma(1/4)^2 / (8\pi)^{1/2}$$

d'où l'on tire

$$\Gamma(1/4) = \frac{(2\pi)^{3/4}}{M(1, \sqrt{2})^{1/2}} = 3,62560990822190831193068515586767200299516768\dots$$

Voir [S] et [C2] pour le calcul de  $\pi$  lui-même par un procédé analogue.

Pour construire la moyenne arithmético-géométrique de deux nombres complexes, il y a à chaque pas un choix de la racine carrée. Cox appelle le bon choix de  $b_1 = \sqrt{a_0 \cdot b_0}$  celui pour lequel  $|a_1 - b_1| \leq |a_1 + b_1|$ , avec de plus  $\text{Im}(b_1/a_1) > 0$  s'il y a égalité.

Toutes les suites obtenues à partir de  $a_0$  et  $b_0$  convergent, la limite étant non nulle si et seulement si on ne fait que des bons choix à partir d'un certain rang. Il y a donc en fin de compte un nombre dénombrable de moyennes arithmético-géométriques de  $a$  et  $b$ . Nous définirons la Mag de  $a$  et  $b$  (que nous noterons  $M(a, b)$ ) comme étant celle obtenue en ne faisant que des bons choix à partir de  $a$  et  $b$ . Les autres limites non nulles, obtenues en faisant quelques mauvais choix au début, seront les mag (avec un petit  $m$ ). La théorie des fonctions thêta permet d'exhiber des liens entre ces diverses moyennes :

Pour  $\tau$  dans le demi-plan de Poincaré  $\mathfrak{h}$ , on note  $q = e^{i\pi\tau}$ , et on considère les fonctions thêta suivantes :

$$f(\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \quad \text{et} \quad g(\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-q)^{n^2}.$$

Notons  $\Gamma_2(4)$  le groupe des matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans  $SL_2(\mathbf{Z})$  telles que  $a \equiv d \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $c \equiv 0 \pmod{4}$  et  $b \equiv 0 \pmod{2}$ . Ce groupe agit sur  $\mathfrak{h}$  et un domaine fondamental  $F$  pour  $\Gamma_2(4)$  est, au bord près, l'ensemble  $\{\tau \in \mathfrak{h}; |\text{Re}(\tau)| \leq 1, |\tau \pm 1/4| \geq 1/4, |\tau \pm 3/4| \geq 1/4\}$  (voir [C1] pour les détails concernant les bords).

La fonction  $k' = f^2/g^2$  définit un isomorphisme

$$k' : \mathfrak{h}/\Gamma_2(4) \simeq \mathbf{C} \setminus \{0, \pm 1\}.$$

et en particulier une bijection  $F \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ .

Les fonctions  $f$  et  $g$  vérifient les relations fondamentales suivantes, qui fournissent le lien avec les Mag :

$$(3) \quad \begin{aligned} f^2(\tau) + g^2(\tau) &= 2 f^2(2\tau) \\ f(\tau) g(\tau) &= g^2(2\tau). \end{aligned}$$

Partant alors de deux nombres complexes non nuls  $a \neq \pm b$ , soit  $\tau$  dans  $F$  défini par  $k'(\tau) = b/a$ . Posons  $\mu = a/f^2(\tau) = b/g^2(\tau)$ .

Il résulte des formules (3) que si on définit

$$a_n = \mu f^2(2^n \cdot \tau) \quad \text{et} \quad b_n = \mu g^2(2^n \cdot \tau)$$

alors  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  sont des choix des moyennes arithmétique et géométrique de  $a_n$  et  $b_n$ . On montre de plus (voir [C1]) que sur le domaine  $F$ , la fonction  $k'(2z)$  est de partie réelle positive (ou nulle, auquel cas la partie imaginaire est positive). Puisque  $b_{n+1}/a_{n+1} = k'(2^{n+1} \cdot \tau)$ , on en déduit que  $b_{n+1}$  est le bon choix de la moyenne géométrique. Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent donc toutes deux vers la Mag de  $a$  et  $b$ . Mais  $g(2^n \cdot \tau)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , donc  $f(2^n \cdot \tau)$  et  $g(2^n \cdot \tau)$  tendent vers 1, de sorte que la limite des suites est égale à  $\mu$ . En résumé, la Mag de  $a$  et  $b$  est donnée par la formule

$$(4) \quad M(a, b) = a/f^2(\tau) \quad \text{où} \quad \tau = k'^{-1}(b/a) \in F.$$

On montre que les autres mag de  $a$  et  $b$  s'obtiennent par les mêmes formules en partant de valeurs de  $\tau$  qui ne sont pas dans le domaine fondamental  $F$ . Le passage d'un domaine fondamental à un autre se fait par conjugaison par un élément de  $\Gamma_2(4)$ , ce qui se traduit finalement par le résultat suivant (cf. [C1] th. 2.2):

Les mag de  $a$  et  $b$  sont les nombres  $v$  tels que

$$(5) \quad \frac{1}{v} = \frac{d}{M(a, b)} + \frac{ic}{M(a+b, a-b)}$$

où  $c$  et  $d$  sont des entiers étrangers tels que  $d \equiv 1 \pmod{4}$  et  $c \equiv 0 \pmod{4}$ .

Les formules (2) à (5) permettent de donner des propriétés arithmétiques des Mag en utilisant les résultats connus sur les périodes d'intégrales elliptiques. Ainsi, en utilisant les résultats de Schneider et leur forme quantitative, on obtient:

**PROPOSITION 1.** *Les mag de deux nombres complexes algébriques non nuls  $a$  et  $b$  tels que  $a \neq \pm b$  sont des nombres transcendants de type de transcendance au plus  $2 + \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .*

*Preuve.* Il suffit de montrer le résultat pour  $M(a, b)$  car toute mag de  $a$  et  $b$  est la Mag de deux nombres algébriques, obtenus après un

nombre fini de pas (bons ou mauvais) à partir de  $a$  et  $b$ . Par homogénéité, il suffit de prouver le résultat pour  $M(1, c)$  où  $c$  est algébrique. La formule (4) montre que  $M(1, z)$  est une fonction analytique de  $z$ . Par ailleurs, si l'on pose  $\lambda = 1 - z^2$ , la période  $\omega = \omega(z)$  de la courbe elliptique  $E_\lambda$  définie par la formule (1) est une fonction analytique de  $\lambda$ , donc de  $z$ . Puisque la relation  $M(1, z) = \pi/\omega(z)$  est vérifiée sur un segment de l'axe réel d'après la formule (2), elle l'est partout par prolongement analytique. Il suffit donc d'appliquer le théorème 1 de [R2] pour obtenir le résultat. Cqfd.

Si de plus la courbe  $E_\lambda$  admet multiplication complexe, les résultats de Choodnovsky ([Ch 1]) montrent que la période  $\omega$  de la démonstration précédente est algébriquement indépendante de  $\pi$  et que  $\mathbf{Q}(\pi, \omega)$  a un type de transcendance au plus  $3 + \varepsilon$ ; ainsi les deux nombres  $\pi$  et  $M(a, b)$  engendrent dans ce cas un corps de degré de transcendance 2 et de type de transcendance au plus  $3 + \varepsilon$ .

D'autres propriétés arithmétiques des Mag proviennent de leurs liens avec les fonctions hypergéométriques :

En développant l'expression  $(1 - \lambda \sin^2 \varphi)^{-1/2}$  en série en  $\lambda \sin^2 \varphi$  et en utilisant les formules de Wallis, on voit facilement que la période  $\omega$  de la courbe  $E_\lambda$  introduite plus haut est donnée par la relation :

$$\frac{\omega}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} ((1/2)_n / n!)^2 \lambda^n \quad \text{où} \quad (1/2)_n = (1/2) \cdot (3/2) \dots (n - 1/2).$$

Cette série est la valeur en  $\lambda$  de la fonction hypergéométrique

$${}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; z \right).$$

On peut aussi faire directement le lien avec la Mag de la façon suivante : en écrivant d'une part que  $M(1+x, 1-x) = M(1, \sqrt{(1-x^2)})$  (car  $M(a, b) = M(a_1, b_1)$ ) et d'autre part que  $M(1+x, 1-x) = (1+x) M(1, (1-x)/(1+x))$  par homogénéité, on voit que la fonction  $M(1, t)$  vérifie une équation fonctionnelle qui se traduit sur les coefficients de son développement en série : on retrouve ainsi les coefficients de la fonction hypergéométrique (cf. [C1]).

Cette fonction hypergéométrique vérifie l'équation différentielle

$$z(1-z) y'' + (1-2z) y' - y/4 = 0$$

qui permet d'obtenir des renseignements précis sur ses approximants de Padé ; Choodnovsky en a déduit des mesures d'irrationalité de certaines valeurs de cette fonction ([Ch 2], th. 6.1), qui entraînent le résultat suivant :

PROPOSITION 2. Pour tout entier  $n > 14$ , il existe une constante  $c(n)$  telle que pour tout rationnel  $p/q$  avec  $q \geq 2$ ,

$$|M(1, \sqrt{1 - 1/n}) - p/q| > q^{-c(n)}.$$

*Remarque.* Le principe de preuve des mesures d'irrationalité par les approximants de Padé consiste à construire de bonnes approximations rationnelles (ou algébriques de petit degré) du nombre considéré, pour montrer qu'il ne peut y en avoir d'autres. Lorsqu'on part de nombres  $a$  et  $b$  qui sont algébriques, il est donc tentant de considérer de ce point de vue les bonnes approximations de  $M(a, b)$  fournies directement par les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ . Mais l'extraction de racine carrée fait que le degré de  $a_n$  ou  $b_n$  croît comme  $2^n$ , au moins apparemment, ce qui empêche de conclure directement à l'irrationalité de  $M(a, b)$ . Qu'en est-il en réalité? On ne peut pas assurer que le degré double à chaque étape de la construction; il peut même baisser: par exemple, si on part du couple  $(8 + 2\sqrt{15}, 8 - 2\sqrt{15})$ , on obtient le couple  $(8, 2)$ , puis  $(5, 4)$  au deuxième pas. Montrons qu'on ne peut pas avoir trois couples de rationnels  $(a_0, b_0)$ ,  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$  à la suite: en effet, ces rationnels devraient vérifier:

$$4b_2^4 = a_0 b_0 (a_0 + b_0)^2.$$

Par homogénéité, on peut supposer que ces nombres sont des entiers et que  $a_0$  et  $b_0$  sont étrangers, en particulier (par symétrie) que  $b_0$  est impair. Puisque  $a_0, b_0$  et  $a_0 + b_0$  sont deux à deux étrangers, on obtient deux systèmes suivant que  $a_0$  est pair ou que  $a_0 + b_0$  est pair:

$$\begin{array}{ll} a_0 = \alpha^4 & a_0 = 4\alpha^4 \\ b_0 = \beta^4 & \text{ou} \quad b_0 = \beta^4 \\ a_0 + b_0 = \gamma^2 & a_0 + b_0 = \gamma^2. \end{array}$$

Dans le premier cas, on obtient l'équation  $\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$ , qui n'a pas de solution non triviale d'après [M] p. 16. Dans le deuxième cas, on obtient l'équation  $4\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$ , d'où  $\gamma^4 = (4\alpha^4 - \beta^4)^2 + 16\alpha^4\beta^4$ , qui est de la forme  $x^4 = y^4 + z^2$  et n'a pas non plus de solution non triviale d'après [M] p. 17.

Cependant, il se peut que les degrés soient divisés par deux plusieurs fois de suite; en effet, le procédé passant de  $a_0$  et  $b_0$  à  $a_1$  et  $b_1$  peut être inversé, ce qui permet de construire à partir de  $a_0$  et  $b_0$  les couples  $(a_{-1}, b_{-1})$ ,  $(a_{-2}, b_{-2})$  et ainsi de suite; on obtient ainsi des nombres dont les degrés croissent en général, et en redescendant les degrés s'abaisseront.

Je conjecture que cela ne peut durer qu'un temps fini, et qu'à partir d'un certain rang le degré double à chaque pas. On peut le prouver dans un bon nombre de cas :

**PROPOSITION 3.** *Si  $a = a_0$  et  $b = b_0$  sont des nombres algébriques non nuls tels que  $a_0/b_0$  et  $4a_1/b_1$  ne soient pas des unités algébriques, alors  $\deg(b_n) > 2^{n-c}$  où  $c$  est une constante ne dépendant que de  $a$  et  $b$ .*

*Preuve.* On choisit un prolongement à  $\bar{\mathbf{Q}}$  des valuations  $p$ -adiques  $v_p$  sur  $\mathbf{Q}$ . Supposons qu'il existe un premier  $p \neq 2$  tel que  $v_p(a_1) < v_p(b_1)$ . On en déduit aisément par récurrence que

$$v_p(a_n) = v_p(a_1) \quad \text{et que} \quad v_p(b_n) = v_p(a_1) + (v_p(b_1) - v_p(a_1))/2^{n-1}.$$

Puisque la valuation de  $b_n$  a un dénominateur qui croît comme  $2^n$ , le degré de  $b_n$  croît aussi comme  $2^n$ . Le raisonnement est le même si  $v_p(a_1) > v_p(b_1)$ . Si maintenant  $v_p(a_1/b_1) = 0$  pour tout premier  $p$  impair, alors on a aussi  $v_p(a) = v_p(b)$  et donc l'hypothèse montre que  $v_2(a/b) \neq 0$  et  $v_2(4a_1/b_1) \neq 0$ . Par symétrie, on peut supposer  $v_2(a) < v_2(b)$ , d'où on déduit par récurrence que

$$\begin{aligned} v_2(a_n) &= v_2(a_1) - n + 1 \quad \text{et} \quad v_2(b_n) \\ &= v_2(a_1) - n + 3 + (v_2(b_1) - v_2(a_1) - 2)/2^{n-1}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, ce nombre a encore un dénominateur qui croît comme  $2^n$  d'où le résultat. Cqfd.

## RÉFÉRENCES

- [C1] COX, D. The arithmetic-geometric mean of Gauss. *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984), 275-330.
- [C2] ——— Gauss and the arithmetic-geometric mean. *Notices of the AMS* 32 (1985), 147-151.
- [Ch 1] CHOODNOVSKY, G. Contributions to the theory of transcendental numbers, chap. 8; *Math. surveys Monogr.* 19, AMS (1984).
- [Ch 2] ——— Padé approximations to the generalized hypergeometric functions I. *J. math. pures et appl.* 58 (1979), 445-476.
- [K, T, Y, U] KANADA, K., Y. TAMURA, S. YOSHINO and Y. USHIRO. Calculation of  $\pi$  to 10,013,395 decimal places based on the Gauss-Legendre algorithm and Gauss arctangent relation. *Math. Comp.* (à paraître).
- [M] MORDELL, L. J. *Diophantine equations*. Acad Press (1969).
- [R1] REYSSAT, E. Moyenne arithmético-géométrique, fonction gamma et produits infinis; in thèse (1982), Paris.
- [R2] ——— Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiques et exponentielles. *Bull. S.M.F.* 108 (1980), 47-79.
- [S] SALAMIN, E. Computation of  $\pi$  using arithmetic-geometric mean. *Math. Comp.* 30 (1976), 565-570.

(Reçu le 18 décembre 1985)

Eric Reyssat

UA 763 Problèmes Diophantiens  
Institut Henri Poincaré  
11, rue Pierre et Marie-Curie  
75231 Paris Cedex 05  
(France)