

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** REPRÉSENTATIONS ET TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE  
POLYNÔME DE JONES-CONWAY  
**Kapitel:** §3. Traces des algèbres de Hecke  
**Autor:** Vogel, Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56602>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

PROPOSITION 2-4. *L'algèbre  $H_n$  est un  $k$ -module libre de base  $S_n$ .*

*Démonstration.* Soit  $p \leq n$  un entier strictement positif. Notons, pour tout  $i$  compris entre 1 et  $p$  (au sens large),  $\tau_i$  l'élément  $\sigma_{p-1}\sigma_{p-2}\dots\sigma_i$ . Il est facile de vérifier les formules suivantes :

$$\forall i \leq p, \forall j < p, \tau_i \sigma_j = \begin{cases} \sigma_j \tau_i & \text{si } j < i - 1 \\ \tau_j & \text{si } j = i - 1 \\ \alpha \tau_i - \beta \tau_{i-1} & \text{si } j = i \\ \sigma_{j-1} \tau_i & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Il en résulte que le sous-module de  $H_n$  engendré par  $S_n$  est stable par multiplication à droite par tous les générateurs  $\sigma_i$  de  $H_n$ , ce qui prouve que  $H_n$  est engendré linéairement par  $S_n$ .

Soit maintenant  $\varphi$  l'application de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{N}$ , de support  $\{1, 2, \dots, n\}$  et qui vaut 1 sur son support. Le  $K$ -module  $M(\varphi)$  est alors isomorphe à l'anneau du groupe symétrique  $K[\mathfrak{S}_n]$ . Soit  $f_0$  l'inclusion de  $\{1, \dots, n\}$  dans  $\mathbf{Z}$ . La multiplication à droite par  $f_0$  induit une application  $K$ -linéaire  $\gamma$  de  $H_n \otimes K$  dans  $M(\varphi)$ . Si l'on tensorise ces modules par  $\mathbf{Z}$  au-dessus de  $K$ , via le morphisme de  $K$  dans  $\mathbf{Z}$  qui envoie  $\lambda$  et  $\mu$  en 1 et  $-1$ ,  $H_n \otimes \mathbf{Z}$  devient  $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$  ainsi que  $M(\varphi)$  et  $\gamma$  devient l'identité. On en déduit que  $\gamma(S_n)$  est une base de  $M(\varphi) \otimes \mathbf{Z}$  et un système libre de  $M(\varphi)$ . Ce qui prouve que  $S_n$  est une base de  $H_n$ .

COROLLAIRE 2-5. *Pour tout entier  $n > 0$ ,  $H_n$  est un  $H_{n-1}$ -module à gauche libre de base  $\Sigma_n = \{1, \sigma_{n-1}, \dots, \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots\sigma_1\}$ .*

COROLLAIRE 2-6. *Pour tout  $n > 0$ ,  $H_{n+1}$  est un  $H_n$ -bimodule isomorphe à  $H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$ .*

*Démonstration.* L'isomorphisme provient de la stabilisation  $i$  de  $H_n$  dans  $H_{n+1}$  et de l'application de  $H_n \times H_n$  dans  $H_{n+1}$  qui à  $(u, v)$  associe  $i(u)\sigma_n i(v)$ . L'application qui s'en déduit respecte les bases (pour la structure le  $H_n$ -module à gauche). C'est donc un isomorphisme.

### § 3. TRACES DES ALGÈBRES DE HECKE

Soit  $n > 0$  un entier. Via la stabilisation  $i$  de  $H_n$  dans  $H_{n+1}$ ,  $H_{n+1}$  est un  $H_n$ -bimodule. On peut donc considérer le module  $E_n = H_0(H_n, H_{n+1})$ , quotient de  $H_{n+1}$  par le sous-module engendré par les éléments de la forme :

$$ax - xa, \quad a \in i(H_n), \quad x \in H_{n+1}.$$

Comme précédemment, le produit  $\times$  induit un produit associatif de  $\Lambda_p \otimes E_q$  dans  $E_{p+q}$  et  $E$  est un  $\Lambda$ -module gradué.

PROPOSITION 3-1. *L'application qui, à tout élément  $x \in H_n$ , associe l'élément  $(x \times 1_1)\sigma_n$  de  $H_{n+1}$ , 1 étant l'unité de  $H_1$ , induit pour tout  $n > 0$  une application de  $E_{n-1}$  dans  $E_n$ . Cette application sera notée  $\theta$ .*

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $\sigma_n \in H_{n+1}$  commute avec tout élément stabilisé d'un élément de  $H_{n-1}$ .

Notations 3-2. On désignera par  $s_0$  la classe de  $1 \in H_1$  et, pour tout  $n > 0$ , on posera

$$s_n = \theta(s_{n-1}).$$

L'application quotient de  $E_n$  dans  $\Lambda_{n+1}$  sera notée  $f$ ;  $f$  est une forme  $\Lambda$ -linéaire surjective, et l'on a:  $\forall n \geq 0, f(s_n) = c_{n+1}$ .

PROPOSITION 3-3.  *$E$  est un  $\Lambda$ -module libre de base  $\{s_0, s_1, s_2, \dots\}$ .*

*Démonstration.* D'après le corollaire 2-6, on a

$$E_n = \Lambda_n \oplus H_0(H_n, H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n).$$

Il n'est pas difficile de montrer que l'application de  $H_n \otimes H_n$  dans  $H_n$  qui à  $u \otimes v$  associe  $vu$  induit un isomorphisme de  $H_0(H_n, H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n)$  sur  $H_0(H_{n-1}, H_n) = E_{n-1}$ . Ce qui montre que l'application de  $\Lambda_n \oplus E_{n-1}$  dans  $E_n$ , qui à  $u \oplus v$  associe  $us_0 + \theta(v)$ , est un isomorphisme.

On en déduit, par récurrence sur  $n$ , la formule

$$E_n = \Lambda_n s_0 \oplus \Lambda_{n-1} s_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_0 s_n,$$

ce qui montre le résultat cherché.

LEMME 3-4. *L'algèbre  $\Lambda$  est engendrée par les éléments  $c_i, i > 1$ .*

*Démonstration.* La formule

$$E_n = \Lambda_n s_0 \oplus \Lambda_{n-1} s_1 \oplus \dots \oplus \Lambda_0 s_n$$

montre que  $\Lambda_{n+1}$  est engendré par les sous-modules  $\Lambda_{n-i} c_{i+1}$ , pour  $i$  variant de 0 à  $n$ . Comme ceci a lieu pour tout  $n > 0$ , on en déduit le résultat.

LEMME 3-5. *L'algèbre  $\Lambda$  est commutative.*

*Démonstration.* Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux tresses. Comme les tresses  $\sigma \times \tau$  et  $\tau \times \sigma$  sont clairement conjuguées, les traces de  $\sigma$  et de  $\tau$  commutent dans  $\Lambda$ . Comme de plus les classes  $c_i$  proviennent de tresses,  $\Lambda$  est commutatif.

Soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{N}$  à support fini. Le module  $M(\varphi)$  (voir § 2) est un module libre de dimension fini sur l'anneau  $K = \mathbf{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}]$  et l'algèbre  $H_n$  ( $n$  étant égal au poids de  $\varphi$ ) agit sur  $M(\varphi)$ . Pour tout élément  $u$  de  $H_n$  on notera  $t_\varphi(u)$  la trace de l'endomorphisme de  $M(\varphi)$  induit par la multiplication par  $u$ . Comme  $t_\varphi$  est linéaire et prend la même valeur en  $uv$  qu'en  $vu$ ,  $t_\varphi$  induit une application linéaire  $T_\varphi$  de  $\Lambda_n$  dans  $K$  que l'on prolongera par 0 sur tous les modules  $\Lambda_p$ ,  $p \neq n$ . Ainsi, l'application  $T_\varphi$  est une application  $k$ -linéaire de  $\Lambda$  dans  $K$ .

LEMME 3-6. *On a la formule :*

$$T_\varphi(c_n) = \lambda^{n-k}(\lambda + \mu)^{k-1}$$

$k$  désignant le cardinal du support de  $\varphi$ .

*Démonstration.* Soit  $S$  le support de  $\varphi$ . C'est une partie de  $\mathbf{Z}$  à  $k$  éléments. Par définition  $M(\varphi)$  a une base  $B(\varphi)$  formée des fonctions  $f$  de  $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$  dans  $S$  telles que pour tout  $i$  de  $S$ ,  $f$  prend la valeur  $i$  exactement  $\varphi(i)$  fois. Si l'on munit  $M(\varphi)$  d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tel que  $B(\varphi)$  soit une base orthonormée, on a

$$T_\varphi(c_n) = \sum_{f \in B(\varphi)} \langle f, s_1 s_2 \dots s_{n-1}(f) \rangle .$$

Soit  $f$  un élément de la base  $B(\varphi)$ . L'élément  $s_{n-1}(f)$  est de la forme  $af + bf \circ \varepsilon_{n-1}$ ,  $b$  étant supposé nul si  $f$  prend les mêmes valeurs en  $n$  et en  $n-1$ . Comme la valeur de  $f \circ \varepsilon_{n-1}$  en  $n$  n'est pas modifiée après action des éléments  $s_i$ ,  $i < n-1$ , on a

$$\langle f, s_1 s_2 \dots s_{n-1}(f) \rangle = a \langle f, s_1 s_2 \dots s_{n-2}(f) \rangle .$$

Si  $f(n-1)$  est strictement inférieur à  $f(n)$ ,  $a$  est nul. Sinon  $a$  est égal à  $\lambda$  ou  $\lambda + \mu$  suivant que  $f(n-1)$  est égal ou non à  $f(n)$ . En itérant ce raisonnement de proche en proche, on vérifie la formule

$$\langle f, s_1 s_2 \dots s_{n-1}(f) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists i < n \text{ tel que } f(i) < f(i+1) \\ \lambda^p (\lambda + \mu)^q & \text{sinon,} \end{cases}$$

$p$  (resp.  $q$ ) étant égal au nombre d'entiers non nuls  $i < n$  tels que  $f(i)$  et égal (resp. strictement supérieur) à  $f(i+1)$ .

Si la suite  $f(1), \dots, f(n)$  est décroissante,  $q$  est égal au cardinal de l'image de  $f$  diminué d'une unité, et  $p$  est égal à  $n - 1 - q$ . Comme de plus la base  $B(\varphi)$  ne contient qu'une seule fonction décroissante, on vérifie aisément le lemme.

PROPOSITION 3-7. Soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{N}$  de poids  $n = p + q$ . Soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $\Lambda_p$  et  $\Lambda_q$ . Alors on a

$$T_\varphi(uv) = \sum T_{\varphi'}(u)T_{\varphi-\varphi'}(v),$$

la sommation ayant lieu sur toutes les fonctions  $\varphi'$  de poids  $p$ , comprises au sens large entre 0 et  $\varphi$ .

*Démonstration.* Désignons par  $H_p \times H_q$  l'image par l'application  $\times$  de  $H_p \otimes H_q$  dans  $H_n$ . Le module  $M(\varphi)$  est isomorphe, en tant que  $H_p \times H_q$ -module à la somme directe des modules  $M(\varphi') \otimes M(\varphi - \varphi')$ ,  $\varphi'$  appartenant à l'ensemble des fonctions de poids  $p$  et comprises entre 0 et  $\varphi$ . Soient  $x$  et  $y$  des représentants de  $u$  et  $v$  dans  $H_p$  et  $H_q$ . Comme la trace de  $u \otimes v$  agissant sur  $M(\varphi') \otimes M(\varphi - \varphi')$  est égal au produit de la trace de  $u$  agissant sur  $M(\varphi')$  par la trace de  $v$  agissant sur  $M(\varphi - \varphi')$ , on obtient le résultat cherché.

COROLLAIRE 3-8. Soit  $\varphi$  une fonction à support fini de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{N}$ . Soit  $\varepsilon$  une bijection de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{Z}$ . Alors les formes linéaires  $T_\varphi$  et  $T_{\varphi \circ \varepsilon}$  sont égales.

*Démonstration.* D'après le lemme 3-6  $T_\varphi$  et  $T_{\varphi \circ \varepsilon}$  prennent la même valeur sur les éléments  $c_n$  de  $\Lambda$ . D'après la proposition 3-7, si, pour tout  $\varphi$ ,  $T_\varphi$  et  $T_{\varphi \circ \varepsilon}$  prennent les mêmes valeurs en  $u$  et en  $v$ , elles prennent, pour tout  $\varphi$ , la même valeur en  $uv$ . On en déduit que  $T_\varphi$  et  $T_{\varphi \circ \varepsilon}$  sont égales quel que soit  $\varphi$ .

Il en résulte que  $T_\varphi$  ne dépend que de la partition du poids  $n$  de  $\varphi$  en les nombres  $\varphi(p)$ . Cette partition est caractérisée par la suite finie  $p_1, p_2, \dots; p_i$  désignant le nombre de fois où  $\varphi$  prend la valeur  $i$ . On notera alors  $T_\varphi$  sous la forme  $T_u$ , où  $u$  est le mot  $c_1^{p_1} c_2^{p_2} \dots$ .

#### § 4. LA TRACE $T$

Soit  $x = (x_i)$  une famille de symboles. On désignera par  $A(x)$  l'algèbre des séries en les  $x_i$  à coefficients dans  $K = \mathbf{Z}[\lambda, \lambda^{-1}, \mu, \mu^{-1}]$ . Un élément de