Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES

Kapitel: §3. Une méthode élémentaire pour calculer le nombre de classes

Autor: Oesterlé, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56588

§ 3. Une méthode élémentaire pour calculer le nombre de classes [1]

Soit d un entier $\geqslant 1$. D'après le § 2, le nombre $\tilde{h}(-d)$ de classes de formes quadratiques de discriminant $-d$ est le nombre de formes quadratiques réduites de discriminant $-d$, c'est-à-dire le nombre de triplets (a, b, c) d'entiers vérifiant

$$\begin{aligned} & b^2 - 4ac = -d \\ (7) \qquad & |b| \leqslant a \leqslant c \\ & b \geqslant 0 \quad \text{si} \quad a \text{ est égal à } |b| \text{ ou à } c\,. \end{aligned}$$

Nous savons déjà que $\tilde{h}(-d)$ est non nul si et seulement si $-d$ est congru à 0 ou à 1 modulo 4. Les conditions (7) entraînent que a, donc aussi $|b|$ est majoré par $\sqrt{d/3}$ (§ 1, formule (3)) et que $|b|$ est de même parité que d. On en déduit aussitôt la formule suivante, permettant de calculer $\tilde{h}(-d)$:

Proposition. *Supposons $-d$ congru à 0 ou à 1 modulo 4. On a:*

$$\tilde{h}(-d) = \sum_{\substack{0 \leqslant b \leqslant \sqrt{d/3} \\ b \equiv d (\mathrm{mod.}\, 2)}} \quad \sum_{\substack{a \mid ((b^2+d)/4) \\ b \leqslant a \leqslant \sqrt{(b^2+d)/4}}} n(a, b)$$

avec $n(a, b) = 1$ si l'on a $b = 0$ ou $a = b$ ou $a = \sqrt{(b^2+d)/4}$, et $n(a, b) = 2$ sinon.

Exemple. Calculons $\tilde{h}(-347)$. On a $10 < \sqrt{347/3} < 11$, d'où le tableau suivant:

b	$(b^2+d)/4$	a	$n(a, b)$
1	$87 = 3.29$	1, 3	1, 2
3	89	—	—
5	$93 = 3.31$	—	—
7	$99 = 3^2.11$	9	2
9	107	—	—

dont on déduit $\tilde{h}(-347) = 5$. Les coefficients des cinq formes réduites se lisent sur le tableau; ce sont:

$$(1, 1, 87),\ (3, 1, 29),\ (3, -1, 29),\ (9, 7, 11) \text{ et } (9, -7, 11)\,.$$

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 174 et 175.

L'étude des formes quadratiques se ramène facilement à celle des formes *primitives*, c'est-à-dire celles dont les coefficients ont 1 pour plus grand commun diviseur. En effet, si $-d < 0$ est congru à 0 ou à 1 modulo 4, il existe un plus grand entier F tel que $-d$ s'écrive $-d_0F^2$ avec $-d_0$ congru à 0 ou 1 modulo 4. Pour toute classe C de formes quadratiques de discriminant $-d$, il existe un diviseur $f \geqslant 1$ de F et une classe C' de formes quadratiques primitives de discriminant $-df^{-2}$ tels que $C = fC'$.

Les nombres de classes $\tilde{h}$ et les nombres de classes primitives h sont donc reliés par l'égalité

$$\tilde{h}(-d) = \sum_{f \mid F} h(-df^{-2}). \tag{8}$$

Lorsque F est égal à 1, ce qui équivaut à dire que d n'est pas divisible par le carré d'un nombre premier impair et est congru à 3 (mod. 4), à 4 (mod. 16) ou à 8 (mod. 16), on dit que $-d$ est un *discriminant fondamental.* Toute forme de discriminant $-d$ est alors primitive et on a $\tilde{h}(-d) = h(-d)$.

§ 4. Le groupe des classes [1]

Cherchant à généraliser la formule classique

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2) = (xx'-yy')^2 + (xy'+yx')^2,$$

Gauss se demande pour quels couples (q, q') de formes quadratiques, il existe une forme quadratique q'' telle que l'on ait une identité

$$q(x, y)q'(x', y') = q''(x'', y''),$$

où x'' et y'' sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de xx', xy', yx' et yy'.

Si l'on a une identité du type précédent, et si $-d$, $-d'$, $-d''$ désignent les discriminants de q, q', q'', le carré du déterminant de l'application linéaire $(x, y) \mapsto (x'', y'')$ $\big($resp. $(x', y') \mapsto (x'', y'')\big)$ est égal à $dq'(x', y')^2/d''$ (resp. $d'q(x, y)^2/d''$).

Gauss montre que lorsque q et q' sont des formes primitives de même discriminant $-d$, il est possible d'obtenir une identité du type ci-dessus, avec q'' forme primitive de discriminant $-d$, et

$$q'(x', y') = \det\big((x, y) \mapsto (x'', y'')\big), \quad q(x, y) = \det\big((x', y') \mapsto (x'', y'')\big).$$

---

[1]) C.-F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 234 à 243.