Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1989)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE THÉORÈME DE BURNSIDE SUR LE COMPTAGE DES ORBITES ET QUELQUES APPLICATIONS

Kapitel: 1. Introduction

Autor: Sigrist, François

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57367

L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 99-106

LE THÉORÈME DE BURNSIDE SUR LE COMPTAGE DES ORBITES ET QUELQUES APPLICATIONS

par François SIGRIST

1. INTRODUCTION

Le nombre d'orbites de l'action d'un groupe fini sur un ensemble fini est donné par la moyenne du nombre de points fixes, calculée sur le groupe. Dans le cas d'une action transitive, ce résultat est dû à Frobenius [3, p. 287]. Le cas général, assorti d'un perfectionnement intéressant, se trouve dans le livre de Burnside [1, chapitre X, théorème VII, p. 191]:

> "The sum of the numbers of symbols left unchanged by each of the permutations of a permutation group of order N is tN, where t is the number of transitive sets in which the group permutes the symbols. The sum of the squares of the numbers of symbols left unchanged by each of the permutations of a transitive group of order N is sN, where s is the number of transitive sets in which a subgroup leaving one symbol unchanged permutes the symbols."

L'application la plus connue de ce résultat se trouve dans un article de Pòlya paru en 1937 [6]. Je présenterai ci-après les principaux aspects de cette « Pòlya's theory of counting », une méthode très efficace de dénombrement. Mais au préalable, je montrerai comment le théorème de Galois sur les équations de degré premier peut servir d'illustration au théorème de Burnside. Je donnerai les démonstrations complètes pour les deux théorèmes, car on ne les trouve pas souvent dans les ouvrages d'enseignement ou dans les cours. Pour ne pas alourdir inutilement les énoncés, je supposerai toujours que l'action d'un groupe est *effective*, et donc que seule l'identité agit trivialement.

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE BURNSIDE

Le groupe G, d'ordre N, agit sur l'ensemble E, à m éléments. On note o_i la cardinalité des orbites $O_i (i = 1 \,.\,.\, t)$. G_x est le stabilisateur de $x \in E$, n_i est l'ordre de G_x pour $x \in O_i$, $\mathrm{Fix}(g)$ est l'ensemble des points fixes de $g \in G$, et a_i est le nombre d'éléments de G ayant exactement i points fixes.