CATÉGORIES DÉRIVÉES ET DUALITÉ, TRAVAUX DE J.-L. VERDIER

Autor(en): **Illusie, Luc**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1990)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-57914

L'Enseignement Mathématique, t. 36 (1990), p. 369-391

CATÉGORIES DÉRIVÉES ET DUALITÉ, TRAVAUX DE J.-L. VERDIER

par Luc ILLUSIE [1])

Je vais parler des travaux de Verdier en algèbre homologique dans les années soixante, du moins des plus célèbres d'entre eux: sa thèse sur les catégories dérivées, et ses contributions aux théories de dualité.

1. CATÉGORIES DÉRIVÉES

1.1. Les catégories dérivées ont eu d'innombrables applications. D'un maniement réservé, au début, à un petit cercle d'initiés autour de Grothendieck, elles sont devenues aujourd'hui d'un usage courant dans quantité de domaines, bien au-delà de la géométrie algébrique (je pense notamment à l'analyse microlocale). Pour comprendre la révolution qu'a constituée l'introduction des catégories dérivées, il faut se replacer en 1960. A cette époque, l'algèbre homologique est déjà très développée. Cohomologie des faisceaux, foncteurs dérivés, suites spectrales forment une théorie élaborée, pour laquelle on dispose d'excellents traités: le livre de Cartan-Eilenberg [3], celui de Godement [10], et le long mémoire de Grothendieck [13], unifiant et généralisant les constructions de [3] et [10]. Pourtant, Grothendieck se rend compte que ce formalisme est nettement insuffisant pour ce qu'il envisage de faire. Deux ans plus tôt, au Congrès international d'Edimbourg, il avait en effet esquissé [14] un vaste programme de reconstruction de la géométrie algébrique: la théorie des schémas. Dans le cadre de ce programme, il avait annoncé des extensions du théorème de dualité de Serre [28] aux faisceaux cohérents sur des variétés algébriques arbitrairement singulières. Au moment d'entreprendre une rédaction d'ensemble de ses résultats, il s'aperçoit que, ne serait-ce que pour formuler les énoncés qu'il a en tête, il manque des outils

[1]) Exposé donné le 19 octobre 1989, lors de la cérémonie en hommage à Jean-Louis Verdier organisée par l'Université de Paris VII.

adéquats. Il conçoit alors une nouvelle théorie des foncteurs dérivés, conduisant à une refonte complète de l'algèbre homologique. Il explique les idées maîtresses de son projet à Verdier, et le lui propose comme sujet de thèse. Verdier met rapidement sur pied les constructions essentielles, et, dans le courant de l'année 1963, rédige un résumé des principaux résultats [V12]. Disposant alors des fondements voulus, Grothendieck expose la théorie de dualité qu'il avait en vue dans un gros manuscrit [15], qui servira de base au séminaire que Hartshorne dirigera à Harvard l'automne de la même année [17]. Le résumé de Verdier [V12] et le premier chapitre de ce séminaire resteront d'ailleurs longtemps les seules références sur la théorie des catégories dérivées.

1.2. L'observation de départ est que les constructions usuelles de l'algèbre homologique fournissent non seulement des groupes de cohomologie, des suites exactes longues, des suites spectrales, mais en général un peu plus: des complexes avec une certaine indétermination. Pour préciser ce point, Grothendieck introduit la notion suivante, fondamentale pour toute la suite: si

$$L = (\ldots \to L^i \to L^{i+1} \to \ldots)\ , \qquad M = (\ldots \to M^i \to M^{i+1} \to \ldots)$$

sont des complexes d'une catégorie abélienne et $u: L \to M$ un morphisme de complexes, on dit que u est un *quasi-isomorphisme* si $H^i u: H^i L \to H^i M$ est un isomorphisme pour tout i. Les complexes obtenus en pratique sont «bien définis à quasi-isomorphisme près».

A titre d'illustration, revenons sur la définition des faisceaux images directes supérieures $R^i f_* E$, où $f: X \to Y$ est une application continue entre espaces topologiques et E un faisceau abélien sur X. On choisit une résolution

$$0 \to E \to I^0 \to I^1 \to \ldots \to I^n \to \ldots$$

(i.e. un quasi-isomorphisme $E \to I$), où les I^n sont des faisceaux abéliens injectifs, on considère le complexe $f_* I$ déduit de I par application terme à terme du foncteur image directe f_*, et l'on «définit» $R^i f_* E$ comme le i-ème faisceau de cohomologie de $f_* I$,

$$R^i f_* E := \mathscr{H}^i(f_* I)\ .$$

Si $E \to I'$ est une seconde résolution de E par un complexe à composantes injectives, il existe un morphisme de résolutions $I \to I'$ (i.e. un morphisme de complexes $I \to I'$ compatible aux augmentations $E \to I$, $E \to I'$), qui est une équivalence d'homotopie; le morphisme $f_* I \to f_* I'$ qui s'en déduit par application de f_* est encore une équivalence d'homotopie, *a fortiori* un quasi-isomorphisme: on obtient ainsi un système transitif d'isomorphismes entre les $\mathscr{H}^i f_* I$, et l'on peut, plus canoniquement, définir $R^i f_* E$ comme la limite (inductive, disons) de ce système. Parfois, on préfère «calculer» $R^i f_* E$ en utilisant d'autres types de résolutions. Supposons qu'on ait une résolution $E \to C$, où les composantes de $C = (C^0 \to C^1 \to \ldots)$ sont acycliques pour f_*, i.e. telles que $R^q f_* C^n = 0$ pour tout $q > 0$ (et tout $n \geqslant 0$) (par exemple une résolution flasque, ou une résolution par des faisceaux mous, ou une résolution de Čech relative à un recouvrement ouvert convenable). Il existe alors un morphisme de résolutions $C \to I$, qui n'est plus en général une équivalence d'homotopie, mais qui, grâce à l'hypothèse faite sur C, est tel que $f_* C \to f_* I$ est encore un quasi-isomorphisme. On a donc $\mathscr{H}^i f_* C \xrightarrow{\sim} R^i f_* E$ (d'où d'ailleurs un système transitif d'isomorphismes entre les $\mathscr{H}^i f_* C$ relatifs aux divers choix de C). Mais la construction donne plus: la famille des complexes $f_* C$ associés aux résolutions à composantes acycliques pour f_*, qui forment une seule classe «à quasi-isomorphisme près». Plus précisément, deux tels complexes $f_* C$, $f_* C'$ sont reliés par des quasi-isomorphismes $f_* C \to f_* I \leftarrow f_* C'$. La connaissance de cette classe est bien sûr plus fine que celle des $R^i f_* E$, elle permet par exemple de reconstituer les groupes de cohomologie $H^n(X, E)$ comme groupes d'hypercohomologie $H^n(Y, f_* C)$ (ce qui donne naissance à la suite spectrale de Leray de f, nous reviendrons sur ce point plus loin).

1.3. C'est sans doute ce type de considérations qui a amené Grothendieck à proposer la construction suivante, très naturelle, mais révolutionnaire à l'époque: $C(A)$ désignant la catégorie des complexes d'une catégorie abélienne A, former la catégorie $D(A)$ déduite de $C(A)$ «en inversant formellement les quasi-isomorphismes». Cette nouvelle catégorie s'appellera *«catégorie dérivée»* de A; le *«foncteur dérivé total»* droit (resp. gauche) d'un foncteur additif $F: A \to B$ devra être un certain «prolongement» de F en un foncteur RF (resp. LF) de $D(A)$ dans $D(B)$, redonnant les $R^i F$ (resp. $L^i F$) par application de H^i.

La construction de $D(A)$, ou plutôt du couple formé de $D(A)$ et du foncteur $C(A) \to D(A)$ comme solution d'un problème universel pour les foncteurs de $C(A)$ dans une catégorie D transformant quasi-isomorphismes en isomorphismes, ne pose pas de problème. Toutefois, Verdier observe qu'il est techniquement plus commode de passer par l'intermédiaire de la catégorie, notée $K(A)$, dite des complexes à homotopie près (qui a mêmes objets que $C(A)$, mais où les flèches sont les classes d'homotopie de morphismes de complexes), et d'effectuer la «localisation» en deux temps:

$$C(A) \to K(A) \to D(A) \ ,$$

le premier revenant à inverser formellement les homotopismes (ou équivalences d'homotopie), le second les (classes d'homotopie de) quasi-isomorphismes. La catégorie $D(A)$ a encore mêmes objets que $C(A)$. L'avantage de passer par $K(A)$ est qu'au lieu qu'une flèche $u: L \to M$ de $D(A)$ soit définie par une chaîne de flèches de $C(A)$ de longueur arbitraire

$$L \to . \leftarrow . \ \dots \ \to . \leftarrow M$$

(où les flèches allant dans le «mauvais» sens sont des quasi-isomorphismes), u s'écrit comme une «fraction» $u = fs^{-1}$ ou $u = t^{-1}g$, où f, s, t, g sont des flèches de $K(A)$, et s, t des quasi-isomorphismes. Plus précisément, $D(A)$ s'obtient à partir de $K(A)$ par un «calcul de fractions bilatère»: les quasi-isomorphismes $t: M \to M'$ de $K(A)$ forment une catégorie filtrante I, et

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(L, M) = \varinjlim_{I} \mathrm{Hom}_{K(A)}(L, M') \tag{1.3.1}$$

(énoncé analogue «de l'autre côté»), cf. [17, I §§3, 4].

1.4. Les catégories $K(A)$ et $D(A)$ sont additives, mais ne sont pas en général abéliennes[1]). Cet inconvénient est pallié, dans une certaine mesure, par l'élément de structure fourni par la famille des «triangles distingués». Un *triangle* de $K(A)$ (resp. $D(A)$) est une suite de morphismes de $K(A)$ (resp. $D(A)$)

$$L \to M \to N \to L[1]$$

(où $L[1]$ est le complexe défini par $L[1]^i = L^{i+1}, d_{L[1]} = -d_L$), notée aussi

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "+1"'] & \\ L \arrow[rr] & & M \arrow[ul] \end{tikzcd} \ ;$$

on a une notion évidente de morphisme de triangles. On dit qu'un triangle est *distingué* s'il est isomorphe au triangle standard défini par le cône $C(u)$ d'un morphisme de complexes $u: E \to F$,

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{i} C(u) \xrightarrow{p} E[1] \ ,$$

où $C(u)^i = E^{i+1} \oplus F^i$, $d_{C(u)} = -d_E + u + d_F$, $i: F \to C(u)$ est l'injection

[1]) En fait, on peut montrer (Verdier, non publié) que $K(A)$ (resp. $D(A)$) n'est abélienne que si A est semi-simple (i.e. telle que toute suite exacte courte de A se scinde).

naturelle, et $p: C(u) \to E[1]$ est l'*opposé* de la projection naturelle. Par exemple, une suite exacte courte de complexes

$$0 \to L' \xrightarrow{u} L \xrightarrow{j} L'' \to 0$$

donne naissance à un triangle distingué $L' \to L \to L'' \xrightarrow{d} L'[1]$ de $D(A)$, caractérisé par le fait que

$$\begin{tikzcd} & & C(u) \arrow[dr] \arrow[dd, "s"] & \\ L' \arrow[r] & L \arrow[ur] \arrow[dr] & & L'[1] \\ & & L'' \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd}$$

soit un morphisme de triangles, où s est le quasi-isomorphisme donné par j sur L^i et 0 sur L'^{i+1}; alors $H^i d: L''^i \to L'^{i+1}$ est l'opérateur bord habituel de la suite exacte longue de cohomologie (ceci explique le signe de p choisi plus haut).

Les triangles distingués de $K(A)$, $D(A)$, et de catégories qui s'en déduisent naturellement (sous-catégories pleines définies par des conditions de degré ou de finitude, catégories «quotients» obtenues par inversion formelle de certaines flèches) ont en commun un certain nombre de propriétés remarquables, que Verdier axiomatise en introduisant la notion de «catégorie triangulée». Une *catégorie triangulée* est une catégorie additive D, munie d'un automorphisme dit de translation, noté $L \mapsto L[1]$, et d'une famille de triangles dits distingués, soumis aux axiomes suivants, que nous recopions pour la commodité du lecteur (cf. [17], [V12]):

(T1) Tout triangle de D isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout objet L de D, le triangle $L \xrightarrow{\mathrm{Id}} L \to 0 \to L[1]$ est distingué. Tout morphisme $u: L \to M$ de D est contenu dans un triangle distingué $L \xrightarrow{u} M \to N \to L[1]$.

(T2) Un triangle $L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1]$ est distingué si et seulement si le triangle $M \xrightarrow{v} N \xrightarrow{w} L[1] \xrightarrow{-u[1]} M[1]$ est distingué.

(T3) Tout diagramme de D

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & L[1] \\ L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & L'[1] \end{tikzcd} ,$$

où les lignes sont des triangles distingués et le carré est commutatif, se complète en un morphisme de triangles.

(T4) Pour tout couple de flèches $u: L \to M$, $v: M \to N$ de D et tout triplet de triangles distingués

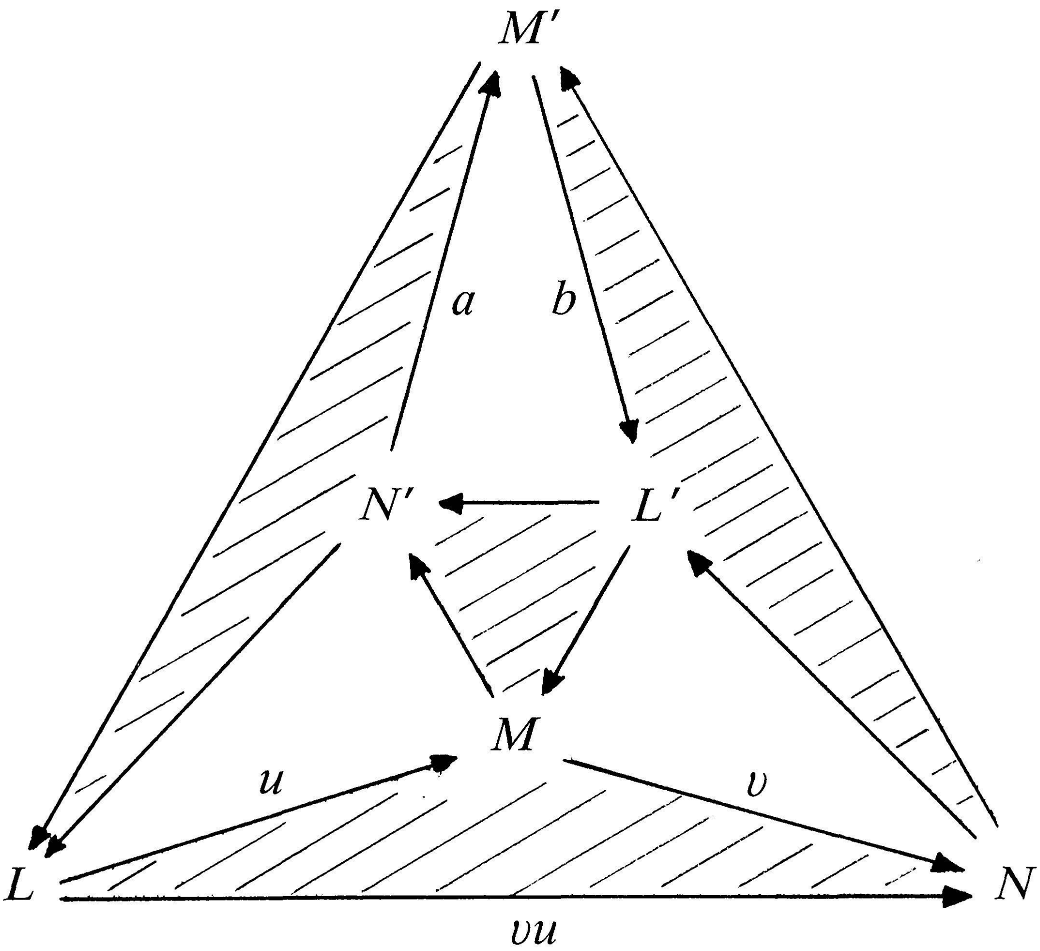
$$L \xrightarrow{u} M \xrightarrow{x} N' \to L[1] , \quad M \xrightarrow{v} N \to L' \xrightarrow{y} M[1] , \quad L \xrightarrow{vu} N \to M' \to L[1] ,$$

il existe des flèches $a: N' \to M'$ et $b: M' \to L'$ telles que (Id_L, v, a) et (u, Id_N, b) soient des morphismes de triangles et que le triangle

$$N' \xrightarrow{a} M' \xrightarrow{b} L' \xrightarrow{x[1] \cdot y} N'[1]$$

soit distingué.

L'axiome (T4) s'appelle souvent *axiome de l'octaèdre,* en raison de la figure obtenue, où les quatre triangles hachurés sont commutatifs, et les quatre autres distingués:



Dans la catégorie $D(A)$, (T4) résulte d'un cas particulier du fait qu'une injection de suites exactes courtes de complexes s'insère dans un diagramme des neuf (suite exacte courte de suites exactes courtes); Verdier remarque d'ailleurs que dans une catégorie triangulée, tout carré commutatif se prolonge en un «diagramme des neuf» [1, 1.1.11].

Une structure un peu plus faible que celle de catégorie triangulée, comprenant les axiomes (T1) à (T3) mais non (T4), a été dégagée pour la première fois, semble-t-il, par Puppe [25], pour exprimer les propriétés de la catégorie homotopique stable.

1.5. Un foncteur additif $F: A \to B$ entre catégories abéliennes se prolonge de façon naturelle en un foncteur additif $F: K(A) \to K(B)$, transformant triangles distingués en triangles distingués. Ce dernier, par contre, ne transforme pas en général quasi-isomorphismes en quasi-isomorphismes, donc ne se prolonge pas en un foncteur de $D(A)$ dans $D(B)$. C'est ce défaut qui est à l'origine de la définition (de Grothendieck-Verdier) des foncteurs dérivés «totaux» [1]): un *foncteur dérivé droit* de F est un couple formé d'un foncteur $RF: D(A) \to D(B)$ et d'un morphisme $m: F \to RF$ (entre foncteurs de $K(A)$ dans $D(B)$),

$$\begin{tikzcd} K(A) \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & D(A) \arrow[d, "RF"] \\ K(B) \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "m"] & D(B) \end{tikzcd} ,$$

universel en un sens évident (à savoir que, pour tout couple ($F': D(A) \to D(B)$, $m': F \to F'$), il existe un unique morphisme $u: RF \to F'$ tel que $m' = um$); de même, un *foncteur dérivé gauche* de F est un couple formé d'un foncteur $LF: D(A) \to D(B)$ et d'un morphisme $m: LF \to F$ possédant une propriété universelle analogue.

Le formalisme des catégories triangulées — et notamment la théorie de «localisation» qu'il y développe — fournit à Verdier un cadre commode pour l'étude de l'existence et des propriétés de transitivité des foncteurs dérivés. Le plus souvent, le dérivé droit RF n'est pas défini sur la catégorie $D(A)$ tout entière, mais seulement sur la sous-catégorie pleine $D^+(A)$ formée des objets à cohomologie bornée inférieurement (qui est aussi la catégorie déduite de $K^+(A)$ (formée des complexes à degré borné inférieurement) par inversion des quasi-isomorphismes): plus précisément, c'est le problème universel analogue relatif à $F: K^+(A) \to K^+(B)$ qui admet une solution. C'est le cas par exemple si A possède suffisamment d'objets injectifs (i.e. tout objet de A se plonge dans un objet injectif); alors H^iRF est le i-ième foncteur dérivé

[1]) Ce qualificatif (destiné à marquer la distinction avec les foncteurs «traditionnels» R^iF, L^iF) ne s'emploie plus guère aujourd'hui.

«usuel» R^iF; de plus RF transforme triangles distingués de $D^+(A)$ en triangles distingués de $D^+(B)$; si $0 \to L' \to L \to L'' \to 0$ est une suite exacte courte de complexes (appartenant à $K^+(A)$), on en déduit (cf. 1.4) un triangle distingué $L' \to L \to L'' \to L'[1]$ de $D(A)$, d'où un triangle distingué $RFL' \to RFL \to RFL'' \xrightarrow{d} RFL'[1]$ de $D(B)$, et $H^id: R^iFL'' \to R^{i+1}FL'$ est l'opérateur bord usuel. Le prototype de cette situation est le cas où F est le foncteur image directe f_* des $\mathcal{O}_X$-modules vers les $\mathcal{O}_Y$-modules, où $f: X \to Y$ est un morphisme d'espaces (voire de topos) annelés. Le principe de la définition de RF est simple: pour $L \in K^+(A)$, on choisit un quasi-isomorphisme $L \xrightarrow{q} I$, où $I \in K^+(A)$ est à composantes injectives (il en existe si A admet assez d'injectifs), et l'on «pose» $RFL = FI$, $m = Fq: FL \to FI$. Quand de plus F est de dimension cohomologique finie (ce qui veut dire qu'il existe un entier N tel que $R^iF = 0$ pour $i > N$), alors RF est défini sur la catégorie $D(A)$ tout entière. De manière analogue, le dérivé gauche LF n'est défini le plus souvent que sur la sous-catégorie pleine $D^-(A)$ formée des complexes à cohomologie bornée supérieurement (qui est aussi la catégorie déduite de $K^-(A)$ (formée des complexes à degré borné supérieurement) par inversion des quasi-isomorphismes). La situation est en fait moins bonne que pour les dérivés droits, car il est rare que A possède suffisamment de projectifs; le prototype est le cas du foncteur $F = f^*$ pour un morphisme f comme ci-dessus: bien qu'il n'y ait pas, en général, assez de projectifs dans la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-modules, on parvient à définir $Lf^*: D^-(Y) \to D^-(X)$ (où $D(-)$ désigne la catégorie dérivée de celle des $\mathcal{O}$-modules), en «posant» $Lf^*L = f^*P$, où $P \to L$ est un quasi-isomorphisme avec P à composantes plates et à degré borné supérieurement.

Si $G: B \to C$ est un second foncteur additif entre catégories abéliennes, alors, sous des hypothèses convenables, on a un isomorphisme de transitivité

$$R(GF) \xrightarrow{\sim} (RG)(RF) \qquad (\text{resp. } L(GF) \xrightarrow{\sim} (LG)(LF)) .$$

entre foncteurs de $D^+(A)$ dans $D^+(C)$ (resp. de $D^-(A)$ dans $D^-(C)$) (voire de $D(A)$ dans $D(C)$). Pour les dérivés droits, c'est le cas par exemple si B possède assez d'objets injectifs et F transforme injectifs de A en objets acycliques pour G (i.e. sur lesquels $R^iG = 0$ pour $i > 0$). A titre d'illustration, on peut prendre pour F le foncteur f_* de tout à l'heure et pour G le foncteur sections globales $\Gamma(Y, -)$ (car l'image directe d'un injectif est flasque). L'isomorphisme $\Gamma(Y, f_*E) \simeq \Gamma(X, E)$ se dérive alors en

$$R\Gamma(Y, Rf_*L) \simeq R\Gamma(X, L) \qquad (L \in D^+(X)) .$$

C'est la formule à laquelle j'ai fait allusion à la fin de 1.2, et qui, par la suite spectrale des foncteurs composés, fournit la suite spectrale de Leray de f

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q f_* L) \Rightarrow H^*(X, L) .$$

Au lieu de partir d'un foncteur additif $F: A \to B$, on peut considérer plus généralement un foncteur exact $F: K(A) \to K(B)$ (ou $K^*(A) \to K(B)$, $* = +$ ou $-$), «exact» voulant dire additif et transformant triangles distingués en triangles distingués, et définir de manière analogue les notions de dérivés droit et gauche de F. On peut aussi considérer des multifoncteurs $K(A_1) \times \dots \times K(A_n) \to K(B)$ covariants en certains arguments et contravariants en les autres, et étendre la théorie des foncteurs dérivés à ce cadre.

Le formalisme des foncteurs dérivés fournit une interprétation intéressante des homomorphismes dans la catégorie dérivée. Si A possède assez d'injectifs, le bifoncteur «complexe des homomorphismes»

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}: K(A)^0 \times K(A) \to K(\mathbf{Z}) , \qquad (L, M) \mapsto \mathrm{Hom}^{\cdot}(L, M)$$

(où $C(\mathbf{Z})$ désigne la catégorie des complexes de groupes abéliens et C^0 la catégorie opposée à une catégorie C) se dérive en un bifoncteur

$$R\mathrm{Hom}: D(A)^0 \times D^+(A) \to D(\mathbf{Z})$$

et l'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{D(A)}(L, M) = H^0 R\mathrm{Hom}(L, M)$$

pour $L \in D(A)$, $M \in D^+(A)$. En pratique, cette formule est beaucoup plus utile que (1.3.1). Si A est la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules sur un espace (ou topos) annelé, on peut en effet analyser le second membre à l'aide du foncteur dérivé $R\mathscr{H}om$ du foncteur $\mathscr{H}om^{\cdot}$ («complexe des faisceaux d'homomorphismes de $\mathscr{O}_X$-modules»): la formule $\Gamma(X, \mathscr{H}om^{\cdot}(L, M)) \simeq \mathrm{Hom}^{\cdot}(L, M)$ se dérive en

$$R\Gamma(X, R\mathscr{H}om(L, M)) \simeq R\mathrm{Hom}(L, M)$$

(pour $L \in D^-(X), M \in D^+(X)$), d'où

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{D(X)}(L, M) \simeq H^0(X, R\mathscr{H}om(L, M))$$

(0-ième groupe d'hypercohomologie de X à valeurs dans le complexe $R\mathscr{H}om(L, M)$); des informations sur les faisceaux de cohomologie de L et M permettent alors, grâce à $(*)$, d'obtenir, par diverses suites spectrales, des renseignements sur le groupe $\mathrm{Hom}_{D(X)}(L, M)$, parfois de le calculer complètement.

Deligne a introduit dans (SGA 4 XVII 1.2) une notion légèrement différente de foncteur dérivé, un peu plus souple en ce qu'elle permet de parler de «dérivabilité en un point» (i.e. en une valeur donnée de l'argument). Dans la plupart des cas, elle coïncide néanmoins avec la notion précédente.

1.6. Si A est une catégorie abélienne, A se trouve plongée de façon naturelle dans la catégorie dérivée $D(A)$, comme sous-catégorie pleine formée des complexes concentrés en degré zéro. Ce n'est pas le seul exemple d'une catégorie abélienne plongée dans la catégorie dérivée. La théorie des faisceaux pervers en fournit d'autres, non triviaux. Pour l'étude systématique de ces plongements, le formalisme des catégories triangulées s'avère être un outil efficace, comme le montrent Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber [1] (pour un historique de la théorie des faisceaux pervers et une vue d'ensemble de ses développements, je renvoie le lecteur au rapport de Kleiman [22]).

1.7. Dans une catégorie triangulée D, toute flèche $u: L \to M$ admet, d'après (T1), un «cône» N, i.e. s'insère dans un triangle distingué $L \to M \to N \to L[1]$. Il résulte des autres axiomes que N est unique à isomorphisme près, cet isomorphisme n'étant toutefois pas unique. Si $u: L \to M$, $u': L' \to M'$ sont des bases de triangles distingués de troisièmes sommets N, N', tout morphisme des bases se prolonge, d'après (T3), en un morphisme de triangles, mais le morphisme des cônes correspondant $N \to N'$ n'est pas unique, et il n'existe pas *a priori* de choix canonique (en fait, comme le montre Verdier dans sa thèse, l'existence d'un «foncteur cône» imposerait des restrictions draconiennes à D: par exemple, si $D = D(A)$, la catégorie abélienne A serait semi-simple). Cette difficulté est à l'origine de la théorie des catégories dérivées filtrées [18, V], où la construction cône, non fonctorielle, est remplacée par celle de gradué associé, qui l'est. Ce formalisme et ses généralisations jouent un rôle essentiel dans la théorie de Hodge mixte de Deligne (cf. [5], [6], et, plus récemment, [26], [27]). Il n'a toutefois pas été dégagé de structure axiomatique jouant vis-à-vis des catégories dérivées filtrées le même rôle que les catégories triangulées vis-à-vis des catégories dérivées ordinaires.

2. Dualité

Comme on l'a dit au début, ce sont les théories de dualité qui ont constitué la motivation initiale pour l'introduction des catégories dérivées. Elles en ont fourni aussi les applications les plus remarquables.

2.1. La première de ces théories à voir le jour est celle développée par Grothendieck pour les faisceaux cohérents sur les schémas, dans ses notes [15], base du séminaire de Hartshorne [17]. Rappelons brièvement en quoi consiste ce formalisme. Si X est un schéma, notons $D(X)$ la catégorie dérivée de celle des $\mathscr{O}_X$-modules, et, si X est noethérien, $D_c(X)$ la sous-catégorie pleine formée des complexes à cohomologie cohérente. Pour tout morphisme lissifiable[1]) $f: X \to Y$ entre schémas noethériens, Grothendieck définit un foncteur

$$f^!: D_c^+(Y) \to D_c^+(X) ,$$

avec un isomorphisme de transitivité

$$(gf)^! \xrightarrow{\sim} f^! g^!$$

pour un composé $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ (vérifiant une condition de cocycle pour un composé de trois morphismes), de telle manière que

(2.1.1)
$$f^!M = \begin{cases} f^*M \otimes \Omega^d_{X/Y}[d] & \text{si} \quad f \text{ est lisse de dimension relative } d \\ R\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_X, M) \mid X & \text{si} \quad f \text{ est une immersion fermée} \end{cases}$$

(c'est une sorte de miracle que ces deux définitions, en apparence si dissemblables, puissent «se mettre ensemble»!). Si f est propre, et X, Y de dimension de Krull finie, le foncteur Rf_* est défini sur $D(X)$. Grothendieck définit alors, moyennant certaines hypothèses supplémentaires (par exemple que f se factorise en une immersion fermée suivie de la projection d'un espace projectif standard) un morphisme fonctoriel, qu'il appelle «*morphisme trace*»,

$$\mathrm{Tr}_f: Rf_* f^! M \to M \qquad (M \in D_c^+(Y)) ,$$

faisant de $f^!$ un adjoint à droite «partiel» de Rf_*, i.e. donnant lieu à un isomorphisme, dit de *dualité globale.*

(2.1.2) $$\mathrm{Hom}(L, f^!M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Rf_*L, M) \qquad (L \in D_c(X), M \in D_c^+(Y)) ;$$

ces morphismes traces vérifient bien entendu des compatibilités convenables avec les isomorphismes de transitivité indiqués plus haut. Si Y est le spectre d'un corps k, si X est lisse de dimension d, alors, pour $M = k$ et L réduit à un seul faisceau cohérent placé en degré $-i$, on retrouve le théorème de dualité de Serre [28]

---

[1]) I.e. qui se factorise en une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse (nous nous plaçons dans ce cadre pour simplifier, d'autres types d'hypothèses sont envisagés dans [17]).

$$\operatorname{Ext}^{d-i}(L, \Omega^d_{X/k}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(H^i(X, L), k)\ .$$

2.2. Dans le même temps, en collaboration avec Artin et Verdier, Grothendieck développe la cohomologie étale. Les résultats clés de la théorie étant acquis (cohomologie des courbes, changement de base propre, pureté cohomologique pour les couples lisses), il bâtit alors un formalisme de dualité analogue au précédent. On fixe cette fois un anneau $A = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, n premier aux caractéristiques résiduelles des schémas envisagés, et l'on travaille avec la catégorie dérivée $D(X)$ des faisceaux de A_X-modules (pour la topologie étale) sur X. Pour $f: X \to Y$ lissifiable, Grothendieck définit un foncteur

$$f^!: D^+(Y) \to D^+(X)$$

(avec un isomorphisme de transitivité comme plus haut pour un composé), de telle manière que

(2.2.1)

$$f^! M = \begin{cases} f^* M \otimes \mu_n^{\otimes d}[2d] & \text{si } f \text{ est lisse de dimension relative } d\ ^{1)} \\ R\mathscr{H}om_{A_Y}(A_X, M)\,|\,X \ \ (= R\underline{\Gamma}_X(M)\,|\,X) & \text{si } f \text{ est une immersion fermée}\ ^{2)}\ . \end{cases}$$

Là encore, c'est un miracle (dû au théorème de pureté) que ces deux définitions se réunissent. Sous des hypothèses supplémentaires convenables (par exemple, si f se factorise en une immersion (non nécessairement fermée) suivie de la projection d'un espace projectif standard), on dispose du foncteur image directe à supports propres $Rf_!: D(X) \to D(Y)$ [3]), et Grothendieck définit encore un *morphisme trace*

$$\operatorname{Tr}_f: Rf_! f^! M \to M \qquad (M \in D^+(Y))\ ,$$

faisant de $f^!$ un adjoint à droite partiel de $Rf_!$, i.e. donnant lieu à un isomorphisme, dit de *dualité globale,*

(2.2.2) $$\operatorname{Hom}(L, f^! M) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Rf_! L, M) \qquad (L \in D(X), M \in D^+(Y))\ .$$ [4])

---

[1]) μ_n désigne le faisceau des racines n-ièmes de l'unité.

[2]) $\underline{\Gamma}_X$ désigne le faisceau des sections à support dans X.

[3]) Ce foncteur n'est pas le dérivé du foncteur $f_! := R^0 f_!$ (SGA 4 XVII 6.1.6).

[4]) La démonstration initiale de Grothendieck est exposée par Verdier dans [V5]. Une formule un peu plus générale est établie par Deligne dans (SGA 4 XVIII).

Si Y est le spectre d'un corps algébriquement clos, et si X est lisse de dimension d, alors, prenant $L = A_X[i]$, $M = A_Y$, on obtient un isomorphisme analogue à l'isomorphisme de dualité de Poincaré pour les variétés topologiques:

$$H^{2d-i}(X, \mu_n^{\otimes d}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_c^i(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) .$$

Les lignes qui précèdent ne donnent évidemment qu'une idée très incomplète du formalisme construit par Grothendieck. Tant dans le contexte des faisceaux cohérents que dans celui de la cohomologie étale, celui-ci comprenait aussi une théorie des complexes dualisants et de dualité locale, un formulaire reliant les foncteurs fondamentaux $(\overset{L}{\otimes}, R\mathscr{H}om, Rf_*, Lf^*, Rf_!, f^!)$ (que Grothendieck a appelé depuis «les six opérations»)[1]), une théorie d'homologie et de classes de cycles[2]).

2.3. De son côté (et toujours à la même époque), Verdier jette les bases d'un formalisme analogue pour les faisceaux sur les espaces topologiques. Si X est un espace topologique, notons $D(X)$ la catégorie dérivée de celle des faisceaux abéliens sur X. Soit $f: X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts. Le foncteur image directe à supports propres $f_!$ admet un dérivé droit $Rf_!: D^+(X) \to D^+(Y)$[3]). Supposons de plus que $f_!$ soit de dimension cohomologique finie (ou, ce qui revient au même, que la dimension de la cohomologie à supports compacts des fibres de f soit uniformément majorée). Alors $Rf_!$ est défini sur $D(X)$. Dans ce contexte, Verdier s'aperçoit qu'on peut renverser la vapeur. Il observe qu'il n'est pas difficile de prouver *a priori* l'existence (et l'unicité) d'un foncteur $f^!: D^+(Y) \to D^+(X)$ adjoint à droite partiel de $Rf_!$, i.e. muni d'un morphisme trace $Rf_! f^! \to \mathrm{Id}$ donnant un isomorphisme

(2.3.1) $$\mathrm{Hom}(L, f^! M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Rf_! L, M) \qquad (L \in D(X), M \in D^+(Y)) .$$

Le point est qu'on peut calculer $Rf_! L$ par un procédé fonctoriel «au niveau des complexes», $Rf_! L = f_! C^{\cdot}(L)$, où $C^{\cdot}(L)$ est une résolution dépendant fonctoriellement du complexe L, à composantes acycliques pour $f_!$, et telle que $L \mapsto f_! C^i(L)$ soit exact en L; l'existence d'un adjoint à droite au foncteur $E \mapsto f_! C^i(E)$ (i fixé, E faisceau abélien sur X) résulte de théorèmes de repré-

[1]) Dans le contexte cohérent, $Rf_!$ n'a été défini que plus tard, par Deligne [4].

[2]) Par un regrettable concours de circonstances, la théorie dans le contexte cohérent, esquissée dans [14] et [15], n'a pas été reprise dans [17], et celle dans le contexte étale (SGA 5, exposés oraux) n'a été rédigée que dix ans après (et publiée hors de SGA 5) (SGA 4 1/2, La classe de cohomologie associée à un cycle), [V11], [23].

[3]) Il n'y a pas ici de piège, cf. note [3]) page précédente.

sentabilité essentiellement triviaux (cf. [V7, 1.0], ou, plus généralement, (SGA 4 XVIII 3.1.3)), et l'existence de $f^!$ en résulte aisément ([V1], [V4], [V7], [11]).

L'isomorphisme de transitivité $R(gf)_! \xrightarrow{\sim} Rg_! Rf_!$ fournit, par adjonction, un isomorphisme $(gf)^! \xrightarrow{\sim} f^! g^!$. Si f est l'inclusion d'un fermé, il découle automatiquement de (2.3.1) que $f^! = R\underline{\Gamma}_X | X$ ($R\underline{\Gamma}_X$ = dérivé du faisceau des sections à supports dans X). Si f est la projection d'un espace $\mathbf{R}^m$ sur un point, le calcul de la cohomologie à supports compacts d'une boule ouverte implique, via (2.3.1), que $f^! \mathbf{Z} = \mathbf{Z}[m]$. Plus généralement, on voit que, pour $f: X \to Y$ «lisse de dimension relative m» (i.e. X localement produit de Y par $\mathbf{R}^m$), on a

(2.3.2) $$f^! M = f^* M \otimes \ or \ [m] \ ,$$

où or est un faisceau de $\mathbf{Z}$-modules localement libre de rang 1 (le «faisceau d'orientation relative») [1]). On retrouve ainsi des formules analogues à (2.1.1) et (2.2.1). Bien entendu, lorsque X est une variété topologique de dimension m, on déduit de (2.3.1) et (2.3.2) la dualité de Poincaré usuelle sous la forme d'une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_c^{i+1}(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \to H^{m-i}(X, or) \to \mathrm{Hom}(H_c^i(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \to 0 \ .$$

En général, pour un espace localement compact X arbitraire (tel que Γ_c soit de dimension cohomologique finie), on a une suite exacte analogue, avec $H^{m-i}(X, or)$ remplacé par

$$H_i(X) := H^{-i}(X, K_X) \ ,$$

où

(2.3.3) $$K_X := a^! \mathbf{Z} \ ,$$

(on note a la projection de X sur un point). Les groupes $H_i(X)$ sont les groupes d'homologie définis par Borel-Moore dans [2]. Ce sont aussi les analogues des groupes d'homologie introduits par Grothendieck et auxquels on a fait allusion plus haut. Si X est assez bon (par exemple, localement ouvert dans un polyèdre fini), $H_*(X)$ coïncide avec l'homologie singulière usuelle [V11].

Le formalisme s'enrichit nettement lorsqu'on travaille dans la catégorie des schémas de type fini sur $\mathbf{C}$ (resp. des espaces analytiques complexes). On

---

[1]) Voir [V4, § 5] pour un énoncé un peu plus général; le lecteur souhaitant reconstituer la démonstration pourra s'aider des techniques de (SGA 4 XVIII 3.2), où est traité l'analogue en cohomologie étale.

dispose alors de la notion de faisceau abélien algébriquement (resp. analytiquement) constructible (i.e. tel qu'il existe une suite décroissante de fermés de Zariski (resp. fermés analytiques) $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ telle que la restriction du faisceau donné à $X_i - X_{i+1}$ soit un faisceau localement [1]) constant de type fini). La sous-catégorie pleine $D_c^b(X)$ de $D(X)$ formée des complexes à cohomologie bornée et constructible se trouve alors être miraculeusement stable sous les «six opérations» $f^*, Rf_*, f^!, Rf_!, \overset{L}{\otimes}$, $R\mathscr{H}om$ [V11]. De plus *(loc. cit.)*, le complexe K_X (2.3.3) est un *complexe dualisant,* i.e. tel que, si D_X désigne le foncteur $R\mathscr{H}om(-, K_X)$, la flèche naturelle

$$L \to D_X D_X L \tag{2.3.4}$$

soit un isomorphisme (pour tout $L \in D_c^b(X)$); enfin, le foncteur D «échange» $\overset{L}{\otimes}$ et $R\mathscr{H}om, f^*$ et $f^!, Rf_*$ et $Rf_!$. Des résultats analogues en cohomologie étale pour les schémas de type fini sur un corps k de caractéristique p avaient été établis par Grothendieck (pour $p = 0$) dans (SGA 5 I), puis la restriction sur p (due à l'usage de la résolution des singularités) fut levée par Deligne (SGA 4 1/2 Th. finitude); les arguments de [V11] sont d'ailleurs essentiellement les mêmes.

2.4. Le principe de la construction *a priori* de $f^!$ comme adjoint a été utilisé par Verdier pour la première fois, je crois, pour établir une théorie de dualité pour la cohomologie des groupes profinis [V3]. Il fut ensuite repris et adapté par Deligne dans le contexte des faisceaux cohérents [4] et dans celui de la cohomologie étale (SGA 4 XVIII): il permet de définir $f^!$ pour f «compactifiable» [2]) plutôt que «lissifiable». Dans le contexte cohérent, le calcul de $f^!$ pour f lisse est assez délicat: il est esquissé dans [4], des compléments sont donnés par Verdier dans [V9].

Mentionnons également deux autres contributions de Verdier aux formalismes de dualité, l'une, en collaboration avec M. Artin, sur la cohomologie étale des corps de nombres [V2], l'autre, en collaboration avec Ramis et Ruget, sur la cohomologie des faisceaux cohérents sur les espaces analytiques complexes [V10].

2.5. Une des applications les plus remarquables de la dualité est la découverte, par Verdier, d'une formule de Lefschetz très générale pour les

[1]) Pour la topologie classique (non celle de Zariski!)

[2]) I.e. qui se factorise en une immersion ouverte suivie d'un morphisme propre.

«correspondances cohomologiques». Cette formule vaut dans plusieurs contextes. Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans celui de la cohomologie étale.

Soit X un schéma propre sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p, fixons un nombre premier l distinct de p, soit L un $\mathbf{Q}_l$-faisceau constructible[1]) sur X, et donnons-nous un k-endomorphisme f de X et «un relèvement de f à L», i.e. un homomorphisme $u: f^*L \to L$. Le couple (f, u) définit un endomorphisme $(f, u)^*$ de $H^*(X, L)$, à savoir le composé de $f^*: H^*(X, L) \to H^*(X, f^*L)$ et de $u: H^*(X, f^*L) \to H^*(X, L)$, et l'on peut considérer le «nombre de Lefschetz»

$$\mathrm{Tr}(f, u) := \sum (-1)^i \mathrm{Tr}((f, u)^* \mid H^i(X, L)) \in \mathbf{Q}_l .$$

Soit X^f le schéma des points fixes de f. Verdier montre dans [V6] que $\mathrm{Tr}(f, u)$ est somme de termes «locaux» attachés aux composantes connexes de X^f:

$$\mathrm{Tr}(f, u) = \sum\nolimits_{x \in \pi_0(X^f)} \nu_x(f, u) . \tag{2.5.1}$$

Le terme $\nu_x(f, u)$ ne dépend que du comportement de L et (f, u) au voisinage (étale) de x. Quand X est une courbe propre et lisse et que les points fixes de f sont isolés et transversaux (i.e. qu'en chacun d'eux le graphe de f est transverse à la diagonale), Artin (cf. [V6]) prouve que l'on a, pour tout $x \in X^f$,

$$\nu_x(f, u) = \mathrm{Tr}(u_x : L_x \to L_x) . \tag{2.5.2}$$

On a donc, dans ce cas,

$$\mathrm{Tr}(f, u) = \sum\nolimits_{x \in X^f} \mathrm{Tr}(u_x : L_x \to L_x) . \tag{2.5.3}$$

Dans *(loc. cit.)*, la formule (2.5.1), dans le cas général, n'était démontrée que sous des hypothèses «de bidualité», satisfaites néanmoins dans le cas où X est une courbe propre et lisse. Leur validité (dans le cas général) fut établie plus tard par Deligne, comme on l'a signalé à la fin de 2.3. D'autre part, Grothendieck, indépendamment, et par une autre méthode («Nielsen-Wecken»), avait prouvé (2.5.3) (et des généralisations au cas de points fixes non transversaux), cf. (SGA 5 XII). Rappelons que, comme Grothendieck l'a montré, la formule (2.5.3) entraîne la formule des traces pour la correspondance de Frobenius (en toute dimension), d'où découle la rationalité des

[1]) Pour la notion de $\mathbf{Q}_l$-faisceau constructible, voir (SGA 5 VI) (ou, pour un résumé, [16] ou (SGA 4 1/2 Rapport §2)).

fonctions L généralisées ([16], (SGA 5 XIV)) (voir aussi (SGA 4 1/2 Rapport) pour une présentation compacte de la démonstration de Grothendieck).

On ignore si la formule (2.5.3) est encore valable pour $\dim X > 1$ (sous l'hypothèse que X est propre et lisse et que le graphe de f est transverse à la diagonale). Deligne propose la conjecture (plus faible) suivante. Supposons que k soit la clôture algébrique d'un corps fini $\mathbf{F}_q$, que X provienne par extension des scalaires d'un schéma X_0 propre et lisse sur $\mathbf{F}_q$, et (f,u) de (f_0,u_0) sur $\mathbf{F}_q$. Soient $\mathrm{Fr}_X: X \to X$ le k-endomorphisme de Frobenius et $F: \mathrm{Fr}_X^* L \to L$ la correspondance de Frobenius définis par (X_0, L_0) (cf. [16] ou (SGA 5 XIV)). Pour $n \geqslant 0$, on peut considérer le composé

$$F^n(f,u) := (\mathrm{Fr}_X^n f: X \to X,\ uF^n: f^* \mathrm{Fr}_X^{n*} L \to f^* L \to L)\ .$$

Comme la dérivée de Fr_X est nulle, dès que $n \geqslant 1$, les points fixes de $\mathrm{Fr}_X^n f$ sont isolés et transversaux, quel que soit l'endomorphisme f donné. Deligne conjecture qu'il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait

$$\mathrm{Tr}(F^n(f,u)) = \sum \mathrm{Tr}(uF^n: L_x \to L_x)\ , \tag{2.5.4}$$

la somme étant étendue aux points fixes de $\mathrm{Fr}_X^n f$. La conjecture est démontrée pour (f,u) égal à l'identité, avec $n_0 = 1$, d'après Grothendieck *(loc. cit.)*, et aussi lorsque l'on a $\dim X = 1$ et que le graphe de f est transverse à la diagonale, avec $n_0 = 0$, comme on vient de le rappeler. Le cas général reste ouvert. En fait, Deligne a formulé des variantes et généralisations de la conjecture précédente, dans le cas non propre. Sous certaines hypothèses techniques, elles ont été établies par Zink [29] dans le cas des surfaces[1]); Gabber a proposé dernièrement une stratégie dans le cas général, à partir des propriétés contractantes du Frobenius du point de vue p-adique.

Le principe de la démonstration de (2.5.1) est très simple: interpréter l'endomorphisme $(f,u)^*$ de $H^*(X,L)$ comme une classe de cohomologie sur le produit $X \times X$ (à support dans le graphe Γ_f de f), et sa trace comme «intégrale» d'un «cup-produit» avec la classe de l'identité (à support dans la diagonale Δ), d'où une classe à support dans $X^f = \Gamma_f \cap \Delta$, dont l'intégrale se décompose suivant les morceaux de X^f. Plus précisément, Verdier établit ce qu'il appelle un «théorème du noyau» [V8], qui est un analogue du classique théorème du noyau de Schwartz. Rappelons brièvement l'énoncé de ce

[1]) *(Ajouté en mai 1990)* et (sous certaines hypothèses également), en dimension quelconque, par Pink [R. Pink, *Lefschetz-Verdier trace formula for cohomology with compact support,* preprint, Bonn, 1990], et, indépendamment par Shpiz [E. Shpiz, Harvard thesis, en préparation].

théorème[1]), pour montrer comment interviennent naturellement les catégories dérivées, là où *a priori* il semblerait qu'on n'en ait pas besoin. Soient X et Y des schémas propres sur $k, L \in D_c^b(X), M \in D_c^b(Y)$ (où D_c^b désigne la «catégorie dérivée des $\mathbf{Q}_l$-faisceaux, à cohomologie bornée, constructible) (le cas qui nous intéresse est $X = Y$, et $L = M$ un $\mathbf{Q}_l$-faisceau constructible). Par la formule de Künneth et le théorème de dualité globale (variante l-adique de (2.2.2)), on a

$$\text{(2.5.5)} \qquad \operatorname{Hom}(R\Gamma(X, L), R\Gamma(Y, M)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(pr_1^* L, pr_2^! M) ,$$

où $pr_1 : X \times Y \to X, pr_2 : X \times Y \to Y$ sont les deux projections; noter d'ailleurs que le premier membre se récrit plus simplement $\operatorname{Hom}(H^*(X, L), H^*(Y, M))$, vu que $R\Gamma(X, L)$ et $R\Gamma(Y, M)$ sont des complexes d'espaces vectoriels. Le «théorème du noyau» affirme qu'on a un isomorphisme

$$\text{(2.5.6)} \qquad \operatorname{Hom}(pr_1^* L, pr_2^! M) \xrightarrow{\sim} H^0(X \times Y, pr_1^* D_X L \otimes pr_2^* M) ,$$

où D_X est l'analogue du foncteur envisagé en (2.3.4), i.e. $R\mathscr{H}om(-, K_X)$, $K_X = a^! \mathbf{Q}_l$ (on note a la projection de X sur $\operatorname{Spec} k$). La construction de (2.5.6) est un jeu sur la dualité, utilisant notamment (mais pas uniquement) le fait que D_X est dualisant. Remarquons que dans le cas qui nous intéresse, bien que L soit juste un $\mathbf{Q}_l$-faisceau, $D_X L$ est un complexe qui n'est pas, en général, concentré en un seul degré, même si X est lisse, à cause des singularités éventuelles de L. L'endomorphisme $(f, u)^*$ de $H^*(X, L)$ correspond, par (2.5.5) et (2.5.6), à une classe dans $H^0(X \times X, pr_1^* D_X L \otimes pr_2^* L)$, et même, comme on le montre sans peine, à une classe à support dans le graphe Δ_f de f:

$$c(f, u) \in H^0_{\Gamma_f}(X \times X, pr_1^* D_X L \otimes pr_2^* L) .$$

L'identité donne de même une classe à support dans la diagonale

$$c(Id) \in H^0_\Delta(X \times X, pr_1^* L \otimes pr_2^* D_X L) .$$

Ces deux classes ont, de façon naturelle, un produit dans $H^0_{X^f}(X \times X, K_{X \times X})$, et la trace de $(f, u)^*$ n'est autre que l'image de ce produit par le «morphisme Tr» qui envoie

$$H^0_{X^f}(X \times X, K_{X \times X}) \ (= H^0(X^f, K_{(X^f)}))$$

dans $\mathbf{Q}_l$. La formule (2.5.1) en résulte aussitôt. Il y a, évidemment, un grand nombre de compatibilités à vérifier, voir (SGA 5 III) pour les fastidieux

---

[1]) En cohomologie l-adique, cf. [V6].

détails. Nous nous sommes placés dans le cadre des «$\mathbf{Q}_l$-faisceaux» pour éviter des difficultés liées à la définition de la trace $\mathrm{Tr}(f, u)$ lorsqu'on travaille avec des coefficients du type $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$ (difficultés qui se résolvent elles aussi par l'usage des catégories dérivées, grâce à la notion de «complexe parfait», cf. *loc. cit.*). Mais la définition de $D_c^b(X, \mathbf{Q}_l)$, qui n'est pas une catégorie dérivée à proprement parler, pose aussi des problèmes techniques (voir [7], ou [9] pour un développement systématique du formalisme l-adique).

2.6. Je voudrais, pour terminer, évoquer deux résultats de Verdier sur la dualité, qui datent du début des années 80, et qui se sont révélés très utiles. L'un concerne le complexe d'intersection, l'autre la transformation de Fourier. Eux aussi sont valables dans divers contextes, plaçons-nous dans le cadre l-adique de 2.5.

a) Soit (k, l) comme en 2.5. Soient X un schéma de type fini sur k, supposé, pour simplifier, intègre et de dimension d, et $a: X \to \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural. «Entre» — si l'on ose dire — le faisceau constant $(\mathbf{Q}_l)_X$ et le complexe dualisant $K_X := a^!\mathbf{Q}_l$, qui sont duaux l'un de l'autre (au sens du foncteur dualisant $D_X = R\mathscr{H}om(-, \mathbf{Q}_l)$), figure le «complexe d'intersection» $\mathscr{IC}_X$ de Goresky-McPherson-Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber, qui est défini par

$$\mathscr{IC}_X = j_{!*}\mathbf{Q}_l[d] ,$$

où $j: U \hookrightarrow X$ est l'ouvert (dense) de lissité de X, et $j_{!*}$ le foncteur «prolongement intermédiaire» [1]. Verdier a montré que ce prolongement de $(\mathbf{Q}_l)_U[d]$ est caractérisé (dans $D_c^b(X)$) par la propriété d'être auto-dual (pour D_X) (et à une torsion à la Tate près), et de vérifier la condition de support suivante:

$$\dim \mathrm{Supp}\ \mathscr{H}^i(\mathscr{IC}_X) < -i \quad \text{pour} \quad i > -d ,$$

cf. [1, 2.1.17].

b) Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps fini $\mathbf{F}_q$ de caractéristique p, V' son dual. Un caractère additif non trivial ψ de $\mathbf{F}_q$ étant fixé, Deligne a construit une «transformation de Fourier»

$$\mathscr{F}_{!,\psi}: D_c^b(V, \bar{\mathbf{Q}}_l) \to D_c^b(V', \bar{\mathbf{Q}}_l) ,$$

«induisant» la transformation de Fourier «usuelle» sur les fonctions sur $V(\mathbf{F}_q)$ lorsqu'on associe à un faisceau E sa fonction trace $x \in V(\mathbf{F}_q) \mapsto \mathrm{Tr}(F, E_x)$, cf. [19], [21], [24]. Verdier a montré que cette transformation commute à la dualité, voir par exemple [21, 2.1.5] pour un énoncé précis. Ce résultat (et ses variantes) a eu une portée considérable: estimations uniformes de sommes exponentielles [21], formule du produit pour les constantes locales des équations fonctionnelles des fonctions L sur les corps de fonctions [24].

Signalons encore d'autres travaux récents de Verdier sur la transformation de Fourier, en liaison avec les faisceaux pervers et les cycles évanescents ([V13] à [V18]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEILINSON, A. A., J. BERNSTEIN et P. DELIGNE. Faisceaux pervers. Dans *Analyse et topologie sur les espaces singuliers,* Astérisque 100, SMF, 1982.

[2] BOREL, A. and J. C. MOORE. Homology theory for locally compact spaces. *Mich. Math. J. 7* (1960), 137-159.

[3] CARTAN, H. and S. EILENBERG. *Homological Algebra.* Princeton Math. Series n° 19, Princeton University Press 1956.

[4] DELIGNE, P. Cohomologie à support propre et construction du foncteur $f^!$. Appendice à R. Hartshorne, *Residues and Duality,* Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, Heidelberg, 1966.

[5] —— Théorie de Hodge II. *Pub. IHES n° 40* (1972), 5-57.

[6] —— Théorie de Hodge III. *Pub. IHES n° 44* (1975), 5-77.

[7] —— La conjecture de Weil II. *Pub. Math. IHES n° 52* (1980), 137-252.

[8] —— Intégration sur un cycle évanescent. *Invent. math. 76* (1983), 129-143.

[9] EKEDAHL, T. On the adic formalism. A paraître dans *The Grothendieck Festschrift,* Progress in Math., Birkhäuser Boston.

[10] GODEMENT, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, 1958.

[11] GRIVEL, P.-P. Une démonstration du théorème de dualité de Verdier. *L'Ens. Math. 31* (1985), 227-247.

[12] —— Catégories dérivées et foncteurs dérivés. Dans *Algebraic D-Modules* (A. Borel *et al.*), Perspectives in Math., Academic Press, Inc. (1987), 1-108.

[13] GROTHENDIECK, A. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. 9* (1957), 119-221.

[14] —— The cohomology theory of abstract algebraic varieties. *Proc. Int. Congr. Math.,* Edinburgh (1958), 103-118.

[15] —— Résidus et dualité. Prénotes pour un séminaire Hartshorne, manuscrit, 1963.

[16] —— Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions *L*. *Sém. Bourbaki 64/65, n° 279,* dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas* (A. Grothendieck and N.H. Kuiper, Ed.), 31-35, North-Holland et Masson, 1968.

[17] HARTSHORNE, R. *Residues and Duality.* Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, Heidelberg, 1966.

[18] ILLUSIE, L. *Complexe cotangent et déformations I.* Lecture Notes in Math. 239, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[19] —— Deligne's l-adic Fourier transform. *Algebraic Geometry – Bowdoin 1985* (S. Bloch, ed.), Proc. Symp. Pure Math. 46 (2) (1987), 151-164.

[20] KASHIWARA, M. and P. SCHAPIRA. *Sheaves on manifolds.* Grundlehren der Math. Wissenschaften, Springer-Verlag (1990).

[21] KATZ, N.M. et G. LAUMON. Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles. *Pub. Math. IHES n° 62* (1985), 361-418.

[22] KLEIMAN, S. The development of intersection homology theory. *A Century of Mathematics in America,* part II, AMS, 1989.

[23] LAUMON, G. Homologie étale. Séminaire de géométrie analytique (A. Douady – J.-L. Verdier), exp. VIII, 163-188, *Astérisque 36-37* (1976), SMF.

[24] —— Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil. *Pub. Math. IHES n° 65* (1987), 131-210.

[25] PUPPE, D. *On the formal structure of stable homotopy theory.* Coll. on Algebraic Topology, Aarhus Universität, 1962.

[26] SAITO, M. *Modules de Hodge polarisables.* Pub. RIMS 553 (1986), Kyoto University.

[27] —— *Mixed Hodge modules,* Pub. RIMS 585 (1987), Kyoto University.

[28] SERRE, J.-P. Cohomologie et géométrie algébrique. *Proc. ICM (1954),* vol. III, 515-520.

[29] ZINK, T. The Lefschetz trace formula for an open algebraic surface. Dans *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions,* Vol. II, Proc. of a Conf. held at the Univ. of Mich., Ann Arbor, July 6-16, 1988, Perspectives in Math. vol. 11, 337-376, Academic Press, 1990.

SIGLES

SGA 4 — Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 63/64, dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Lecture Notes in Math. 269, 270* (1972), *305* (1973), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

SGA 5 — Cohomologie l-adique et fonctions *L*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 65/66, dirigé par A. Grothendieck, *Lecture Notes in Math. 589,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1977).

SGA 4 1/2 — Cohomologie étale, par P. Deligne, *Lecture Notes in Math. 569,* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1977).

TRAVAUX DE J.-L. VERDIER

[V1] Le théorème de dualité de Poincaré. *CRAS Paris 256* (1963), 2084-2086.

[V2] (Avec M. ARTIN) *Seminar on étale cohomology of number fields.* Woods Hole conf. on algebraic geometry, AMS (1964).

[V3] Dualité dans la cohomologie des groupes profinis. Appendice à *Cohomologie galoisienne* (J.-P. SERRE), Lecture Notes in Math. 5, V-1 à V-23, Springer-Verlag (1965), quatrième édition (1973).

[V4] Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. *Séminaire Bourbaki 65/66, n° 300,* 300-01 à 300-13, Benjamin (1966).

[V5] A duality theorem in the étale cohomology of schemes. *Conference on local fields.* Nuffic Summer School held at Driebergen in 1966, 184-198, Springer-Verlag (1967).

[V6] The Lefschetz fixed point formula in étale cohomology. *Conference on local fields,* Nuffic Summer School held at Driebergen in 1966, 199-214, Springer-Verlag (1967).

[V7] Théorème de dualité pour la cohomologie des espaces localement compacts, dans Dualité de Poincaré. *Séminaire Heidelberg-Strasbourg 66/67,* Publ. IRMA Strasbourg 3 (1969), exp. 4.

[V8] Théorème du noyau, dans Dualité de Poincaré. *Séminaire Heidelberg-Strasbourg 66/67,* Publ. IRMA Strasbourg 3 (1969), exp. 9.

[V9] Base change for twisted inverse image of coherent sheaves. *Bombay coll. on algebraic geometry in 1968,* Oxford University Press (1969), 393-408.

[V10] (Avec J.-P. RAMIS et G. RUGET) Dualité relative en géométrie analytique complexe. *Invent. Math. 13* (1971), 261-283.

[V11] Classe d'homologie associée à un cycle. *Séminaire de géométrie analytique* (A. Douady – J.-L. Verdier), exp. VI, 101-151, Astérisque 36-37 (1976), SMF.

[V12] Catégories dérivées, quelques résultats (Etat 0). IHES 1963, publié dans SGA 4 1/2, 262-311.

[V13] Géométrie microlocale. *Conference on Algebraic Geometry Tokyo-Kyoto 1982,* Lecture Notes in Math. 1016, 125-133, Springer-Verlag (1983).

[V14] Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée. Dans *Analyse et topologie sur les espaces singuliers (II-III),* Astérisque 101-102 (1983), 332-364, SMF.

[V15] (Avec J.-L. BRYLINSKI et B. MALGRANGE) Transformation de Fourier géométrique. *CRAS Paris 297,* Gauthier-Villars (1983), 55-58.

[V16] Extension of a perverse sheaf over a closed subspace. Dans *Systèmes différentiels et singularités,* Astérisque 130 (1985), 210-217, SMF.

[V17] Prolongement de faisceaux pervers monodromiques. Dans *Systèmes différentiels et singularités,* Astérisque 130 (1985), 218-236, SMF.

[V18] (Avec J.-L. BRYLINSKI et B. MALGRANGE) Transformation de Fourier géométrique II. *CRAS Paris 303,* Gauthier-Villars (1987), 193-198.

Note sur la bibliographie

La thèse de Verdier sur les catégories dérivées n'a pas été publiée. Verdier a pourtant rédigé, dans les années soixante, un long manuscrit, couvrant la plus grande partie du sujet. On ne peut que souhaiter qu'il paraisse un jour. En attendant, la référence classique reste le début du séminaire Hartshorne [17], combiné avec le fascicule de résultats de Verdier [V12] et le texte de Deligne (SGA 4 XVII §§1, 2). Diverses questions de signes sont examinées dans [8]. Le lecteur trouvera dans [1] d'importants compléments sur les catégories triangulées et les catégories dérivées. Enfin, à l'intention du débutant, signalons deux textes récents, à vocation pédagogique: [12], et [20, I], plus étoffé, et agrémenté d'exercices.

Remerciements. Je suis heureux de remercier Pierre Cartier, Pierre Deligne et Hélène Esnault pour leurs remarques sur une première version du manuscrit.

(Reçu le 31 mai 1990)

Luc Illusie

Université de Paris-Sud
Arithmétique et Géométrie algébrique – Unité associée au CNRS URA D 0752
Bât. 425
91405 Orsay Cedex (France)