2. Dualité

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1990)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Deligne a introduit dans (SGA 4 XVII 1.2) une notion légèrement différente de foncteur dérivé, un peu plus souple en ce qu'elle permet de parler de «dérivabilité en un point» (i.e. en une valeur donnée de l'argument). Dans la plupart des cas, elle coïncide néanmoins avec la notion précédente.

1.6. Si A est une catégorie abélienne, A se trouve plongée de façon naturelle dans la catégorie dérivée $D(A)$, comme sous-catégorie pleine formée des complexes concentrés en degré zéro. Ce n'est pas le seul exemple d'une catégorie abélienne plongée dans la catégorie dérivée. La théorie des faisceaux pervers en fournit d'autres, non triviaux. Pour l'étude systématique de ces plongements, le formalisme des catégories triangulées s'avère être un outil efficace, comme le montrent Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber [1] (pour un historique de la théorie des faisceaux pervers et une vue d'ensemble de ses développements, je renvoie le lecteur au rapport de Kleiman [22]).

1.7. Dans une catégorie triangulée D, toute flèche $u: L \to M$ admet, d'après (T1), un «cône» N, i.e. s'insère dans un triangle distingué $L \to M \to N \to L[1]$. Il résulte des autres axiomes que N est unique à isomorphisme près, cet isomorphisme n'étant toutefois pas unique. Si $u: L \to M$, $u': L' \to M'$ sont des bases de triangles distingués de troisièmes sommets N, N', tout morphisme des bases se prolonge, d'après (T3), en un morphisme de triangles, mais le morphisme des cônes correspondant $N \to N'$ n'est pas unique, et il n'existe pas *a priori* de choix canonique (en fait, comme le montre Verdier dans sa thèse, l'existence d'un «foncteur cône» imposerait des restrictions draconiennes à D: par exemple, si $D = D(A)$, la catégorie abélienne A serait semi-simple). Cette difficulté est à l'origine de la théorie des catégories dérivées filtrées [18, V], où la construction cône, non fonctorielle, est remplacée par celle de gradué associé, qui l'est. Ce formalisme et ses généralisations jouent un rôle essentiel dans la théorie de Hodge mixte de Deligne (cf. [5], [6], et, plus récemment, [26], [27]). Il n'a toutefois pas été dégagé de structure axiomatique jouant vis-à-vis des catégories dérivées filtrées le même rôle que les catégories triangulées vis-à-vis des catégories dérivées ordinaires.

2. Dualité

Comme on l'a dit au début, ce sont les théories de dualité qui ont constitué la motivation initiale pour l'introduction des catégories dérivées. Elles en ont fourni aussi les applications les plus remarquables.

2.1. La première de ces théories à voir le jour est celle développée par Grothendieck pour les faisceaux cohérents sur les schémas, dans ses notes [15], base du séminaire de Hartshorne [17]. Rappelons brièvement en quoi consiste ce formalisme. Si X est un schéma, notons $D(X)$ la catégorie dérivée de celle des $\mathscr{O}_X$-modules, et, si X est noethérien, $D_c(X)$ la sous-catégorie pleine formée des complexes à cohomologie cohérente. Pour tout morphisme lissifiable[1]) $f: X \to Y$ entre schémas noethériens, Grothendieck définit un foncteur

$$f^!: D_c^+(Y) \to D_c^+(X)\ ,$$

avec un isomorphisme de transitivité

$$(gf)^! \xrightarrow{\sim} f^! g^!$$

pour un composé $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ (vérifiant une condition de cocycle pour un composé de trois morphismes), de telle manière que

(2.1.1)

$$f^!M = \begin{cases} f^*M \otimes \Omega^d_{X/Y}[d] & \text{si} \quad f \text{ est lisse de dimension relative } d \\ R\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{O}_X, M) \mid X & \text{si} \quad f \text{ est une immersion fermée} \end{cases}$$

(c'est une sorte de miracle que ces deux définitions, en apparence si dissemblables, puissent «se mettre ensemble»!). Si f est propre, et X, Y de dimension de Krull finie, le foncteur Rf_* est défini sur $D(X)$. Grothendieck définit alors, moyennant certaines hypothèses supplémentaires (par exemple que f se factorise en une immersion fermée suivie de la projection d'un espace projectif standard) un morphisme fonctoriel, qu'il appelle «*morphisme trace*»,

$$\mathrm{Tr}_f: Rf_* f^! M \to M \qquad (M \in D_c^+(Y))\ ,$$

faisant de $f^!$ un adjoint à droite «partiel» de Rf_*, i.e. donnant lieu à un isomorphisme, dit de *dualité globale*.

(2.1.2) $$\mathrm{Hom}(L, f^!M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Rf_*L, M) \qquad (L \in D_c(X), M \in D_c^+(Y))\ ;$$

ces morphismes traces vérifient bien entendu des compatibilités convenables avec les isomorphismes de transitivité indiqués plus haut. Si Y est le spectre d'un corps k, si X est lisse de dimension d, alors, pour $M = k$ et L réduit à un seul faisceau cohérent placé en degré $-i$, on retrouve le théorème de dualité de Serre [28]

---

[1]) I.e. qui se factorise en une immersion fermée suivie d'un morphisme lisse (nous nous plaçons dans ce cadre pour simplifier, d'autres types d'hypothèses sont envisagés dans [17]).

$$\mathrm{Ext}^{d-i}(L, \Omega^d_{X/k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H^i(X, L), k) .$$

2.2. Dans le même temps, en collaboration avec Artin et Verdier, Grothendieck développe la cohomologie étale. Les résultats clés de la théorie étant acquis (cohomologie des courbes, changement de base propre, pureté cohomologique pour les couples lisses), il bâtit alors un formalisme de dualité analogue au précédent. On fixe cette fois un anneau $A = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, n premier aux caractéristiques résiduelles des schémas envisagés, et l'on travaille avec ~~la catégo~~rie dérivée $D(X)$ des faisceaux de A_X-modules (pour la topologie étale) sur X. Pour $f: X \to Y$ lissifiable, Grothendieck définit un foncteur

$$f^!: D^+(Y) \to D^+(X)$$

(avec un isomorphisme de transitivité comme plus haut pour un composé), de telle manière que

(2.2.1)
$$f^!M = \begin{cases} f^*M \otimes \mu_n^{\otimes d}[2d] & \text{si } f \text{ est lisse de dimension relative } d\text{[1]} \\ R\mathscr{H}om_{A_Y}(A_X, M)|X \ (= R\underline{\Gamma}_X(M)|X) & \text{si } f \text{ est une immersion fermée[2]} . \end{cases}$$

Là encore, c'est un miracle (dû au théorème de pureté) que ces deux définitions se réunissent. Sous des hypothèses supplémentaires convenables (par exemple, si f se factorise en une immersion (non nécessairement fermée) suivie de la projection d'un espace projectif standard), on dispose du foncteur image directe à supports propres $Rf_!: D(X) \to D(Y)$[3]), et Grothendieck définit encore un *morphisme trace*

$$\mathrm{Tr}_f: Rf_! f^! M \to M \qquad (M \in D^+(Y)) ,$$

faisant de $f^!$ un adjoint à droite partiel de $Rf_!$, i.e. donnant lieu à un isomorphisme, dit de *dualité globale,*

(2.2.2) $$\mathrm{Hom}(L, f^!M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Rf_!L, M) \qquad (L \in D(X), M \in D^+(Y)) .$$ [4])

[1]) μ_n désigne le faisceau des racines n-ièmes de l'unité.

[2]) $\underline{\Gamma}_X$ désigne le faisceau des sections à support dans X.

[3]) Ce foncteur n'est pas le dérivé du foncteur $f_! := R^0 f_!$ (SGA 4 XVII 6.1.6).

[4]) La démonstration initiale de Grothendieck est exposée par Verdier dans [V5]. Une formule un peu plus générale est établie par Deligne dans (SGA 4 XVIII).

Si Y est le spectre d'un corps algébriquement clos, et si X est lisse de dimension d, alors, prenant $L = A_X[i]$, $M = A_Y$, on obtient un isomorphisme analogue à l'isomorphisme de dualité de Poincaré pour les variétés topologiques:

$$H^{2d-i}(X, \mu_n^{\otimes d}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(H_c^i(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) .$$

Les lignes qui précèdent ne donnent évidemment qu'une idée très incomplète du formalisme construit par Grothendieck. Tant dans le contexte des faisceaux cohérents que dans celui de la cohomologie étale, celui-ci comprenait aussi une théorie des complexes dualisants et de dualité locale, un formulaire reliant les foncteurs fondamentaux ($\overset{L}{\otimes}, R\mathscr{H}om, Rf_*, Lf^*, Rf_!, f^!$) (que Grothendieck a appelé depuis «les six opérations») [1]), une théorie d'homologie et de classes de cycles [2]).

2.3. De son côté (et toujours à la même époque), Verdier jette les bases d'un formalisme analogue pour les faisceaux sur les espaces topologiques. Si X est un espace topologique, notons $D(X)$ la catégorie dérivée de celle des faisceaux abéliens sur X. Soit $f: X \to Y$ une application continue entre espaces localement compacts. Le foncteur image directe à supports propres $f_!$ admet un dérivé droit $Rf_!: D^+(X) \to D^+(Y)$ [3]). Supposons de plus que $f_!$ soit de dimension cohomologique finie (ou, ce qui revient au même, que la dimension de la cohomologie à supports compacts des fibres de f soit uniformément majorée). Alors $Rf_!$ est défini sur $D(X)$. Dans ce contexte, Verdier s'aperçoit qu'on peut renverser la vapeur. Il observe qu'il n'est pas difficile de prouver *a priori* l'existence (et l'unicité) d'un foncteur $f^!: D^+(Y) \to D^+(X)$ adjoint à droite partiel de $Rf_!$, i.e. muni d'un morphisme trace $Rf_!f^! \to \mathrm{Id}$ donnant un isomorphisme

(2.3.1) $\qquad \mathrm{Hom}(L, f^!M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Rf_!L, M) \qquad (L \in D(X), M \in D^+(Y))$.

Le point est qu'on peut calculer $Rf_!L$ par un procédé fonctoriel «au niveau des complexes», $Rf_!L = f_!C^\cdot(L)$, où $C^\cdot(L)$ est une résolution dépendant fonctoriellement du complexe L, à composantes acycliques pour $f_!$, et telle que $L \mapsto f_!C^i(L)$ soit exact en L; l'existence d'un adjoint à droite au foncteur $E \mapsto f_!C^i(E)$ (i fixé, E faisceau abélien sur X) résulte de théorèmes de repré-

[1]) Dans le contexte cohérent, $Rf_!$ n'a été défini que plus tard, par Deligne [4].

[2]) Par un regrettable concours de circonstances, la théorie dans le contexte cohérent, esquissée dans [14] et [15], n'a pas été reprise dans [17], et celle dans le contexte étale (SGA 5, exposés oraux) n'a été rédigée que dix ans après (et publiée hors de SGA 5) (SGA 4 1/2, La classe de cohomologie associée à un cycle), [V11], [23].

[3]) Il n'y a pas ici de piège, cf. note [3]) page précédente.

sentabilité essentiellement triviaux (cf. [V7, 1.0], ou, plus généralement, (SGA 4 XVIII 3.1.3)), et l'existence de $f^!$ en résulte aisément ([V1], [V4], [V7], [11]).

L'isomorphisme de transitivité $R(gf)_! \xrightarrow{\sim} Rg_! Rf_!$ fournit, par adjonction, un isomorphisme $(gf)^! \xrightarrow{\sim} f^! g^!$. Si f est l'inclusion d'un fermé, il découle automatiquement de (2.3.1) que $f^! = R\underline{\Gamma}_X \,|\, X$ ($R\underline{\Gamma}_X$ = dérivé du faisceau des sections à supports dans X). Si f est la projection d'un espace $\mathbf{R}^m$ sur un point, le calcul de la cohomologie à supports compacts d'une boule ouverte implique, via (2.3.1), que $f^!\mathbf{Z} = \mathbf{Z}[m]$. Plus généralement, on voit que, pour $f: X \to Y$ «lisse de dimension relative m» (i.e. X localement produit de Y par $\mathbf{R}^m$), on a

(2.3.2) $$f^!M = f^*M \otimes \mathit{or}\ [m] ,$$

où or est un faisceau de $\mathbf{Z}$-modules localement libre de rang 1 (le «faisceau d'orientation relative») [1]). On retrouve ainsi des formules analogues à (2.1.1) et (2.2.1). Bien entendu, lorsque X est une variété topologique de dimension m, on déduit de (2.3.1) et (2.3.2) la dualité de Poincaré usuelle sous la forme d'une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_c^{i+1}(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \to H^{m-i}(X, \mathit{or}) \to \mathrm{Hom}(H_c^i(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \to 0 .$$

En général, pour un espace localement compact X arbitraire (tel que Γ_c soit de dimension cohomologique finie), on a une suite exacte analogue, avec $H^{m-i}(X, \mathit{or})$ remplacé par

$$H_i(X) := H^{-i}(X, K_X) ,$$

où

(2.3.3) $$K_X := a^!\mathbf{Z} ,$$

(on note a la projection de X sur un point). Les groupes $H_i(X)$ sont les groupes d'homologie définis par Borel-Moore dans [2]. Ce sont aussi les analogues des groupes d'homologie introduits par Grothendieck et auxquels on a fait allusion plus haut. Si X est assez bon (par exemple, localement ouvert dans un polyèdre fini), $H_*(X)$ coïncide avec l'homologie singulière usuelle [V11].

Le formalisme s'enrichit nettement lorsqu'on travaille dans la catégorie des schémas de type fini sur $\mathbf{C}$ (resp. des espaces analytiques complexes). On

---

[1]) Voir [V4, § 5] pour un énoncé un peu plus général; le lecteur souhaitant reconstituer la démonstration pourra s'aider des techniques de (SGA 4 XVIII 3.2), où est traité l'analogue en cohomologie étale.

dispose alors de la notion de faisceau abélien algébriquement (resp. analytiquement) constructible (i.e. tel qu'il existe une suite décroissante de fermés de Zariski (resp. fermés analytiques) $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ telle que la restriction du faisceau donné à $X_i - X_{i+1}$ soit un faisceau localement [1]) constant de type fini). La sous-catégorie pleine $D_c^b(X)$ de $D(X)$ formée des complexes à cohomologie bornée et constructible se trouve alors être miraculeusement stable sous les «six opérations» $f^*, Rf_*, f^!, Rf_!, \overset{L}{\otimes}$, $R\mathscr{H}om$ [V11]. De plus *(loc. cit.)*, le complexe K_X (2.3.3) est un *complexe dualisant,* i.e. tel que, si D_X désigne le foncteur $R\mathscr{H}om(-, K_X)$, la flèche naturelle

$$L \to D_X D_X L \tag{2.3.4}$$

soit un isomorphisme (pour tout $L \in D_c^b(X)$); enfin, le foncteur D «échange» $\overset{L}{\otimes}$ et $R\mathscr{H}om, f^*$ et $f^!, Rf_*$ et $Rf_!$. Des résultats analogues en cohomologie étale pour les schémas de type fini sur un corps k de caractéristique p avaient été établis par Grothendieck (pour $p = 0$) dans (SGA 5 I), puis la restriction sur p (due à l'usage de la résolution des singularités) fut levée par Deligne (SGA 4 1/2 Th. finitude); les arguments de [V11] sont d'ailleurs essentiellement les mêmes.

2.4. Le principe de la construction *a priori* de $f^!$ comme adjoint a été utilisé par Verdier pour la première fois, je crois, pour établir une théorie de dualité pour la cohomologie des groupes profinis [V3]. Il fut ensuite repris et adapté par Deligne dans le contexte des faisceaux cohérents [4] et dans celui de la cohomologie étale (SGA 4 XVIII): il permet de définir $f^!$ pour f «compactifiable» [2]) plutôt que «lissifiable». Dans le contexte cohérent, le calcul de $f^!$ pour f lisse est assez délicat: il est esquissé dans [4], des compléments sont donnés par Verdier dans [V9].

Mentionnons également deux autres contributions de Verdier aux formalismes de dualité, l'une, en collaboration avec M. Artin, sur la cohomologie étale des corps de nombres [V2], l'autre, en collaboration avec Ramis et Ruget, sur la cohomologie des faisceaux cohérents sur les espaces analytiques complexes [V10].

2.5. Une des applications les plus remarquables de la dualité est la découverte, par Verdier, d'une formule de Lefschetz très générale pour les

---

[1]) Pour la topologie classique (non celle de Zariski!)

[2]) I.e. qui se factorise en une immersion ouverte suivie d'un morphisme propre.

«correspondances cohomologiques». Cette formule vaut dans plusieurs contextes. Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans celui de la cohomologie étale.

Soit X un schéma propre sur un corps algébriquement clos k de caractéristique p, fixons un nombre premier l distinct de p, soit L un $\mathbf{Q}_l$-faisceau constructible[1]) sur X, et donnons-nous un k-endomorphisme f de X et «un relèvement de f à L», i.e. un homomorphisme $u: f^*L \to L$. Le couple (f, u) définit un endomorphisme $(f, u)^*$ de $H^*(X, L)$, à savoir le composé de $f^*: H^*(X, L) \to H^*(X, f^*L)$ et de $u: H^*(X, f^*L) \to H^*(X, L)$, et l'on peut considérer le «nombre de Lefschetz»

$$\mathrm{Tr}(f, u) := \sum (-1)^i \mathrm{Tr}((f, u)^* \mid H^i(X, L)) \in \mathbf{Q}_l \,.$$

Soit X^f le schéma des points fixes de f. Verdier montre dans [V6] que $\mathrm{Tr}(f, u)$ est somme de termes «locaux» attachés aux composantes connexes de X^f:

$$\mathrm{Tr}(f, u) = \sum_{x \in \pi_0(X^f)} \nu_x(f, u) \,. \tag{2.5.1}$$

Le terme $\nu_x(f, u)$ ne dépend que du comportement de L et (f, u) au voisinage (étale) de x. Quand X est une courbe propre et lisse et que les points fixes de f sont isolés et transversaux (i.e. qu'en chacun d'eux le graphe de f est transverse à la diagonale), Artin (cf. [V6]) prouve que l'on a, pour tout $x \in X^f$,

$$\nu_x(f, u) = \mathrm{Tr}(u_x: L_x \to L_x) \,. \tag{2.5.2}$$

On a donc, dans ce cas,

$$\mathrm{Tr}(f, u) = \sum_{x \in X^f} \mathrm{Tr}(u_x: L_x \to L_x) \,. \tag{2.5.3}$$

Dans *(loc. cit.)*, la formule (2.5.1), dans le cas général, n'était démontrée que sous des hypothèses «de bidualité», satisfaites néanmoins dans le cas où X est une courbe propre et lisse. Leur validité (dans le cas général) fut établie plus tard par Deligne, comme on l'a signalé à la fin de 2.3. D'autre part, Grothendieck, indépendamment, et par une autre méthode («Nielsen-Wecken»), avait prouvé (2.5.3) (et des généralisations au cas de points fixes non transversaux), cf. (SGA 5 XII). Rappelons que, comme Grothendieck l'a montré, la formule (2.5.3) entraîne la formule des traces pour la correspondance de Frobenius (en toute dimension), d'où découle la rationalité des

---

[1]) Pour la notion de $\mathbf{Q}_l$-faisceau constructible, voir (SGA 5 VI) (ou, pour un résumé, [16] ou (SGA 4 1/2 Rapport §2)).

fonctions L généralisées ([16], (SGA 5 XIV)) (voir aussi (SGA 4 1/2 Rapport) pour une présentation compacte de la démonstration de Grothendieck).

On ignore si la formule (2.5.3) est encore valable pour $\dim X > 1$ (sous l'hypothèse que X est propre et lisse et que le graphe de f est transverse à la diagonale). Deligne propose la conjecture (plus faible) suivante. Supposons que k soit la clôture algébrique d'un corps fini $\mathbf{F}_q$, que X provienne par extension des scalaires d'un schéma X_0 propre et lisse sur $\mathbf{F}_q$, et (f,u) de (f_0,u_0) sur $\mathbf{F}_q$. Soient $\mathrm{Fr}_X : X \to X$ le k-endomorphisme de Frobenius et $F: \mathrm{Fr}_X^* L \to L$ la correspondance de Frobenius définis par (X_0, L_0) (cf. [16] ou (SGA 5 XIV)). Pour $n \geqslant 0$, on peut considérer le composé

$$F^n(f,u) := (\mathrm{Fr}_X^n f : X \to X,\ uF^n : f^* \mathrm{Fr}_X^{n*} L \to f^* L \to L)\ .$$

Comme la dérivée de Fr_X est nulle, dès que $n \geqslant 1$, les points fixes de $\mathrm{Fr}_X^n f$ sont isolés et transversaux, quel que soit l'endomorphisme f donné. Deligne conjecture qu'il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait

$$\mathrm{Tr}(F^n(f,u)) = \sum \mathrm{Tr}(uF^n : L_x \to L_x)\ , \tag{2.5.4}$$

la somme étant étendue aux points fixes de $\mathrm{Fr}_X^n f$. La conjecture est démontrée pour (f,u) égal à l'identité, avec $n_0 = 1$, d'après Grothendieck *(loc. cit.)*, et aussi lorsque l'on a $\dim X = 1$ et que le graphe de f est transverse à la diagonale, avec $n_0 = 0$, comme on vient de le rappeler. Le cas général reste ouvert. En fait, Deligne a formulé des variantes et généralisations de la conjecture précédente, dans le cas non propre. Sous certaines hypothèses techniques, elles ont été établies par Zink [29] dans le cas des surfaces[1]); Gabber a proposé dernièrement une stratégie dans le cas général, à partir des propriétés contractantes du Frobenius du point de vue p-adique.

Le principe de la démonstration de (2.5.1) est très simple: interpréter l'endomorphisme $(f,u)^*$ de $H^*(X,L)$ comme une classe de cohomologie sur le produit $X \times X$ (à support dans le graphe Γ_f de f), et sa trace comme «intégrale» d'un «cup-produit» avec la classe de l'identité (à support dans la diagonale Δ), d'où une classe à support dans $X^f = \Gamma_f \cap \Delta$, dont l'intégrale se décompose suivant les morceaux de X^f. Plus précisément, Verdier établit ce qu'il appelle un «théorème du noyau» [V8], qui est un analogue du classique théorème du noyau de Schwartz. Rappelons brièvement l'énoncé de ce

---

[1]) *(Ajouté en mai 1990)* et (sous certaines hypothèses également), en dimension quelconque, par Pink [R. Pink, *Lefschetz-Verdier trace formula for cohomology with compact support,* preprint, Bonn, 1990], et, indépendamment par Shpiz [E. Shpiz, Harvard thesis, en préparation].

théorème[1]), pour montrer comment interviennent naturellement les catégories dérivées, là où *a priori* il semblerait qu'on n'en ait pas besoin. Soient X et Y des schémas propres sur $k, L \in D_c^b(X), M \in D_c^b(Y)$ (où D_c^b désigne la «catégorie dérivée des $\mathbf{Q}_l$-faisceaux, à cohomologie bornée, constructible) (le cas qui nous intéresse est $X = Y$, et $L = M$ un $\mathbf{Q}_l$-faisceau constructible). Par la formule de Künneth et le théorème de dualité globale (variante l-adique de (2.2.2)), on a

$$\text{(2.5.5)} \qquad \operatorname{Hom}(R\Gamma(X,L), R\Gamma(Y,M)) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(pr_1^* L, pr_2^! M) ,$$

où $pr_1 : X \times Y \to X, pr_2 : X \times Y \to Y$ sont les deux projections; noter d'ailleurs que le premier membre se récrit plus simplement $\operatorname{Hom}(H^*(X,L), H^*(Y,M))$, vu que $R\Gamma(X,L)$ et $R\Gamma(Y,M)$ sont des complexes d'espaces vectoriels. Le «théorème du noyau» affirme qu'on a un isomorphisme

$$\text{(2.5.6)} \qquad \operatorname{Hom}(pr_1^* L, pr_2^! M) \xrightarrow{\sim} H^0(X \times Y, pr_1^* D_X L \otimes pr_2^* M) ,$$

où D_X est l'analogue du foncteur envisagé en (2.3.4), i.e. $R\mathscr{H}om(-, K_X)$, $K_X = a^! \mathbf{Q}_l$ (on note a la projection de X sur $\operatorname{Spec} k$). La construction de (2.5.6) est un jeu sur la dualité, utilisant notamment (mais pas uniquement) le fait que D_X est dualisant. Remarquons que dans le cas qui nous intéresse, bien que L soit juste un $\mathbf{Q}_l$-faisceau, $D_X L$ est un complexe qui n'est pas, en général, concentré en un seul degré, même si X est lisse, à cause des singularités éventuelles de L. L'endomorphisme $(f,u)^*$ de $H^*(X,L)$ correspond, par (2.5.5) et (2.5.6), à une classe dans $H^0(X \times X, pr_1^* D_X L \otimes pr_2^* L)$, et même, comme on le montre sans peine, à une classe à support dans le graphe Δ_f de f:

$$c(f,u) \in H^0_{\Gamma_f}(X \times X, pr_1^* D_X L \otimes pr_2^* L) .$$

L'identité donne de même une classe à support dans la diagonale

$$c(Id) \in H^0_\Delta(X \times X, pr_1^* L \otimes pr_2^* D_X L) .$$

Ces deux classes ont, de façon naturelle, un produit dans $H^0_{X^f}(X \times X, K_{X \times X})$, et la trace de $(f,u)^*$ n'est autre que l'image de ce produit par le «morphisme Tr» qui envoie

$$H^0_{X^f}(X \times X, K_{X \times X}) \ (= H^0(X^f, K_{(X^f)}))$$

dans $\mathbf{Q}_l$. La formule (2.5.1) en résulte aussitôt. Il y a, évidemment, un grand nombre de compatibilités à vérifier, voir (SGA 5 III) pour les fastidieux

---

[1]) En cohomologie l-adique, cf. [V6].

détails. Nous nous sommes placés dans le cadre des «$\mathbf{Q}_l$-faisceaux» pour éviter des difficultés liées à la définition de la trace $\mathrm{Tr}(f, u)$ lorsqu'on travaille avec des coefficients du type $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$ (difficultés qui se résolvent elles aussi par l'usage des catégories dérivées, grâce à la notion de «complexe parfait», cf. *loc. cit.*). Mais la définition de $D_c^b(X, \mathbf{Q}_l)$, qui n'est pas une catégorie dérivée à proprement parler, pose aussi des problèmes techniques (voir [7], ou [9] pour un développement systématique du formalisme l-adique).

2.6. Je voudrais, pour terminer, évoquer deux résultats de Verdier sur la dualité, qui datent du début des années 80, et qui se sont révélés très utiles. L'un concerne le complexe d'intersection, l'autre la transformation de Fourier. Eux aussi sont valables dans divers contextes, plaçons-nous dans le cadre l-adique de 2.5.

a) Soit (k, l) comme en 2.5. Soient X un schéma de type fini sur k, supposé, pour simplifier, intègre et de dimension d, et $a: X \to \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural. «Entre» — si l'on ose dire — le faisceau constant $(\mathbf{Q}_l)_X$ et le complexe dualisant $K_X := a^!\mathbf{Q}_l$, qui sont duaux l'un de l'autre (au sens du foncteur dualisant $D_X = R\mathscr{H}om(-, \mathbf{Q}_l)$), figure le «complexe d'intersection» $\mathscr{IC}_X$ de Goresky-McPherson-Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber, qui est défini par

$$\mathscr{IC}_X = j_{!*}\mathbf{Q}_l[d] \ ,$$

où $j: U \hookrightarrow X$ est l'ouvert (dense) de lissité de X, et $j_{!*}$ le foncteur «prolongement intermédiaire» [1]. Verdier a montré que ce prolongement de $(\mathbf{Q}_l)_U[d]$ est caractérisé (dans $D_c^b(X)$) par la propriété d'être auto-dual (pour D_X) (et à une torsion à la Tate près), et de vérifier la condition de support suivante:

$$\dim \mathrm{Supp}\ \mathscr{H}^i(\mathscr{IC}_X) < -i \quad \text{pour} \quad i > -d \ ,$$

cf. [1, 2.1.17].

b) Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps fini $\mathbf{F}_q$ de caractéristique p, V' son dual. Un caractère additif non trivial ψ de $\mathbf{F}_q$ étant fixé, Deligne a construit une «transformation de Fourier»

$$\mathscr{F}_{!,\psi}: D_c^b(V, \bar{\mathbf{Q}}_l) \to D_c^b(V', \bar{\mathbf{Q}}_l) \ ,$$

«induisant» la transformation de Fourier «usuelle» sur les fonctions sur $V(\mathbf{F}_q)$ lorsqu'on associe à un faisceau E sa fonction trace $x \in V(\mathbf{F}_q) \mapsto \mathrm{Tr}(F, E_x)$, cf. [19], [21], [24]. Verdier a montré que cette transformation commute à la dualité, voir par exemple [21, 2.1.5] pour un énoncé précis. Ce résultat (et ses variantes) a eu une portée considérable: estimations uniformes de sommes exponentielles [21], formule du produit pour les constantes locales des équations fonctionnelles des fonctions L sur les corps de fonctions [24].

Signalons encore d'autres travaux récents de Verdier sur la transformation de Fourier, en liaison avec les faisceaux pervers et les cycles évanescents ([V13] à [V18]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Beilinson, A.A., J. Bernstein et P. Deligne. Faisceaux pervers. Dans *Analyse et topologie sur les espaces singuliers,* Astérisque 100, SMF, 1982.

[2] Borel, A. and J.C. Moore. Homology theory for locally compact spaces. *Mich. Math. J. 7* (1960), 137-159.

[3] Cartan, H. and S. Eilenberg. *Homological Algebra.* Princeton Math. Series n° 19, Princeton University Press 1956.

[4] Deligne, P. Cohomologie à support propre et construction du foncteur $f^!$. Appendice à R. Hartshorne, *Residues and Duality,* Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, Heidelberg, 1966.

[5] —— Théorie de Hodge II. *Pub. IHES n° 40* (1972), 5-57.

[6] —— Théorie de Hodge III. *Pub. IHES n° 44* (1975), 5-77.

[7] —— La conjecture de Weil II. *Pub. Math. IHES n° 52* (1980), 137-252.

[8] —— Intégration sur un cycle évanescent. *Invent. math. 76* (1983), 129-143.

[9] Ekedahl, T. On the adic formalism. A paraître dans *The Grothendieck Festschrift,* Progress in Math., Birkhäuser Boston.

[10] Godement, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann, 1958.

[11] Grivel, P.-P. Une démonstration du théorème de dualité de Verdier. *L'Ens. Math. 31* (1985), 227-247.

[12] —— Catégories dérivées et foncteurs dérivés. Dans *Algebraic D-Modules* (A. Borel *et al.*), Perspectives in Math., Academic Press, Inc. (1987), 1-108.

[13] Grothendieck, A. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J. 9* (1957), 119-221.