

## 4. Abelian schemes

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1990)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$(\{\bar{\omega}_U - d_{X/S}g_U\}, \{f_{U,V} - (g_U - g_V)\})$$

for some one-chain  $\{g_U\}$  with coefficients in  $\mathcal{O}_X$  such that

$$s^*f_{U,V} = u^*f_{U,V} = s^*(g_U - g_V) \quad \text{and} \quad t^*f_{U,V} = v^*f_{U,V} = t^*(g_U - g_V).$$

Let  $\eta_U = \omega_U - dg_U$ . Now

$$s^*\eta_U - s^*\eta_V = s^*df_{U,V} - s^*d(g_U - g_V) = 0$$

by the conditions that  $\{g_U\}$  must satisfy and the fact that  $(\{\omega_U\}, \{f_{U,V}\})$  is a hypercycle. Similarly,  $t^*\eta_U - t^*\eta_V = 0$ . Let  $\eta_s$  and  $\eta_t$  be the elements of  $\Omega_S^1$  determined by the cocycles  $\{s^*\eta_U\}$  and  $\{t^*\eta_U\}$  respectively.

Now to compute  $\nabla h([\omega])$  we must lift  $\bar{\omega}_U - d_{X/S}g_U$  to a section of  $\Omega_{X,Z}^1$ . Let  $e_{s,U}$  and  $e_{t,U}$  be elements of  $\mathcal{O}_X(U)$  such that  $s^*e_{s,U} = 1$ ,  $t^*e_{t,U} = 0$ ,  $t^*e_{s,U} = 0$  and  $s^*e_{t,U} = 1$ . These elements exist since  $Z$  is étale over  $S$ . Then  $\eta_U - (e_{s,U}\eta_s + e_{t,U}\eta_t)$  is such a lifting. To compute  $\nabla h([\omega])$  we must take the hyper-coboundary of  $(\{\eta_U - (e_{s,U}\eta_s + e_{t,U}\eta_t)\}, \{f_{U,V} - (g_U - g_V)\})$ . It is

$$(\{\eta_s \otimes d_{X/S}e_{s,U} + \eta_t \otimes d_{X/S}e_{t,U}\}, \{\eta_s \otimes (e_{s,U} - e_{s,V}) + \eta_t \otimes (e_{t,U} - e_{t,V})\}, 0).$$

The class of this hypercycle is the image of

$$\eta_t - \eta_s \in \Omega_S^1 \quad \text{in} \quad \Omega_S^1 \otimes H_{DR}^1(X/S, Z)$$

(recall that we've determined a map of  $K[S]$  into  $H_{DR}^1(X/S, Z)$ ). Hence  $\nabla h([\omega]) = \eta_t - \eta_s$ .

The proposition now follows from the fact that

$$(\{\eta_s + ds^*g_U\}, \{s^*g_U - s^*g_V\}) = u^*(\{\omega_U\}, \{f_{U,V}\})$$

and

$$(\{\eta_t + dt^*g_U\}, \{t^*g_U - t^*g_V\}) = v^*(\{\omega_U\}, \{f_{U,V}\}). \quad \square$$

**COROLLARY 1.3.4.** *If, in the above,  $u$  and  $v$  are constant, then  $M(s, t) = 0$ .*

#### 4. ABELIAN SCHEMES

Suppose now that  $A$  is an Abelian scheme over  $S$ . Let  $m: A \times_S A \rightarrow A$  be the addition law and  $e$  the zero section. For  $s, t \in A(S)$ , let  $M(s) = M(e, s)$  and  $s + t = m(s, t)$ .

**THEOREM 1.4.1.** *The map  $M$  from  $A(S)$  to  $\text{Ext}(H_{DR}^1(A/S), K[S])$  is a homomorphism.*

*Proof.* Let  $s$  and  $t$  be elements of  $A(S)$ . Define the map  $g: A \rightarrow A$  by  $g = m \circ (id, t \circ f)(g(x) = x + t(f(x)))$ . Then  $g^*: H_{DR}^1(A/S) \rightarrow H_{DR}^1(A/S)$  is the identity so that  $g^*M(e, s) = M(e, s)$  on the one hand and  $g^*M(e, s) = M(t, s + t)$  by Proposition 1.3.2 on the other. Hence,

$$M(s) + M(t) = M(e, s) + M(e, t) = M(t, s + t) + M(e, t) = M(e, s + t)$$

by Proposition 1.3.1.  $\square$

Let  $(B, \tau)$  denote the  $K(S)/K$  trace of  $A_{K(S)}$  (see [L-AV]). In particular,  $B$  is an Abelian scheme over  $K$  and  $\tau: B \times \text{spec}(K(S)) \rightarrow A_{K(S)}$  is a homomorphism. Since  $K$  has characteristic zero  $\tau$  is a closed immersion. Philosophically,  $B$  is the largest constant Abelian subscheme of  $A_{K(S)}$  defined over  $K$ . The morphism  $\tau$  extends uniquely to an  $S$ -morphism  $\bar{\tau}: B \times_K S \rightarrow A$ . It follows that  $B(K)$  maps naturally into  $A(S)$ . We call the elements  $s$  of  $A(S)$  such that  $ns$  is in the image of  $B(K)$ , the constant sections of  $A/S$ .

PROPOSITION 1.4.2. *The kernel of  $M$  contains all constant sections of  $A/S$ .*

*Proof.* Let  $s$  be a constant section of  $A/S$ . Then there exists a positive integer  $n$  such that  $ns = \bar{\tau} \circ (t \times id)$  where  $t \in B(K)$ . Hence it follows from the above theorem, Proposition 1.3.2 and Proposition 1.3.4 that  $nM(s) = M(ns) = M(\bar{\tau}(t \times id)) = \bar{\tau}^*M(t \times id) = 0$ . Since

$$\text{Ext}(H_{DR}^1(A/S), K[S])$$

is uniquely divisible, by Corollary 1.1.2, the proposition follows.  $\square$

We wish to prove the converse of this proposition. I.e. we wish to prove:

THEOREM 1.4.3. *The kernel of  $M$  is precisely the group of all constant sections of  $A/S$ .*

We will give two proofs of this result. The first is Algebraic. The second is analytic and is essentially a reformulation of Manin's proof based on remarks by Katz [K2] in a letter to Ogus.

## 5. THE ALGEBRAIC PROOF

### a. *Differentials with logarithmic singularities*

(See [K] §1.0). Suppose  $X$  is a smooth scheme over a scheme  $T$  and  $Z$  is a hypersurface in  $X$  whose irreducible components are smooth over  $T$  and