

2. PICARD-FUCHS COMPUTATIONS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1990)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. PICARD-FUCHS COMPUTATIONS

We will need an explicit formula for $\mu(s, t)$ in some cases. Suppose that X/S has relative dimension one. Suppose $z \in K[S]$ such that $\Omega_S^1(S) = K[S]dz$ and suppose U is an affine open of $X, s \in U(S)$ and $v \in \mathcal{O}_X(U)$, such that $s^*v = 0$ and $\Omega_{X/S}^1(U) = \mathcal{O}_X(U)d_{X/S}v$. For $u \in \mathcal{O}_X(U)$ we define $\partial_z u$ and $\partial_v u$ by

$$du = \partial_z u dz + \partial_v u dv$$

Clearly ∂_z is a lifting of $\partial = : \partial / \partial z$ to a derivation of $\mathcal{O}_X(U)$. For $\omega = ud_{X/S}v \in \Omega_{X/S}^1(U)$ we set $\partial_z \omega = \partial_z u d_{X/S}v$ (the image of the Lie derivative of udv with respect to ∂_z in $\Omega_{X/S}^1(U)$). Since ∂ generates \mathcal{D} over $K[S]$ we can and will also make \mathcal{D} act on $\Omega_{X/S}^1(U)$ using ∂_z .

LEMMA 2.2.1. *Suppose $\omega = ud_{X/S}v \in \Omega_{X/S}^1(U)$ is of the second kind and $[\omega]$ is its class in $H_{DR}^1(X/S)$. Then*

$$\partial[\omega] = [\partial_z \omega] .$$

Proof. The element udv is a lifting of $ud_{X/S}v$ to $\Omega_X^1(U)$, and $d(udv) = du \wedge dv = \partial_z u dz \wedge dv$. Since this is the image of $dz \otimes \partial_z \omega$ in Ω_X^2 the lemma follows. \square

COROLLARY 2.2.2. *Suppose $\sum D_i \otimes \omega_i \in PF$. Then*

$$\sum D_i \omega_i = d_{X/S} w$$

for some $w \in \mathcal{O}_X(U)$.

Suppose $t \neq s$ is an element of $U(S)$ and $Z = s \cup t$. Let l denote the map from $K[S]$ into $H_{DR}^1(U/S, Z)$ associated to the pair (s, t) . For $\omega \in \Omega_{X/S}^1(U)$ let $[\omega]_Z$ denote the class of ω in $H_{DR}^1(U/S, Z)$.

LEMMA 2.2.3. *Suppose U, s and v are as above, $t \in U(S)$ and $t^*v \neq 0$. Suppose $\omega = ud_{X/S}v \in \Omega_{X/S}^1(U)$. Then $\partial^k[\omega]_Z$ equals*

$$[\partial_z^k \omega]_Z + l(\sum \partial^{i-1}(t^*(\partial_z^{k-i} u) \partial t^* v))$$

where i runs from 1 to k .

Proof. By shrinking S we may suppose that t^*v is invertible. We want to compute $\nabla[\omega]_Z$. First we must lift $ud_{X/S}v$ to section of $\Omega_{X,Z}^1(U)$. Let $y = f^*(t^*v)$. Then $\eta = u y dy^{-1} v$ is such a lifting and it equals $udv - u y y^{-1} \partial_z y dz$. Then $\nabla[\omega]_Z$ is the class of

$$d\eta = \partial_z u dz \wedge dv - d(uvy^{-1}) \wedge dy = dz \wedge \partial_z u dv + dz \wedge d(uvy^{-1} \partial_z y) .$$

which is the image of

$$dz \otimes (\partial_z \omega + d_{X/S}(uvy^{-1} \partial_z y)) \in \Omega_S^1 \otimes \Omega_{X/S}^1(U) .$$

Hence $\partial[\omega]$ is the class of $\partial_z \omega + d_{X/S}(uvy^{-1} \partial_z y)$ in $H_{DR}^1(U/S, Z)$. Since $(t^* - s^*)(uvy^{-1} \partial_z y) = t^* u \partial(t^* v)$ the lemma follows in the case $k = 1$. Since $\partial \circ l = l \circ \partial$ the lemma follows in general by induction. \square

COROLLARY 2.2.4. *Suppose U, s, z and v are as above, $t \in X(S)$ which meets U and $t^* v \neq 0$. Suppose ω, ω' and ω'' are elements $\omega_{X/S}$. Let $\omega = u d_{X/S} v$ and $\omega' = u' d_{X/S} v$ on U . Then we have:*

(i) *Suppose $\mu = \partial \otimes \omega - 1 \otimes \omega' \in PF$, $\omega = u d_{X/S} v$ and $\partial_z \omega - \omega' = d_{X/S} w$, with $w \in \mathcal{O}_X(U)$. Then*

$$\mu(s, t) = t^* w - s^* w + (t^* u) \partial t^* v .$$

(ii) *Suppose $\mu = \partial^2 \otimes \omega + \partial \otimes \omega' + 1 \otimes \omega'' \in PF$ and $\partial^2 \omega + \partial \omega' + \omega'' = d_{X/S} w$ with $w \in \mathcal{O}_X(U)$. Then*

$$\mu(s, t) = t^* ((w - s^* w, (u' + 2\partial_z u), \partial_v u, u) \cdot (1, x_t, x_t^2, \partial x_t))$$

and where $x_t = \partial t^* v$.

Proof. First shrink S so that s and t satisfy the hypotheses of the lemma and then apply it and the definition of $\mu(s, t)$. \square

Suppose $g: X \rightarrow A$ is a morphism over S from a curve to an Abelian scheme. Suppose $\kappa_{A/S}$ is an isomorphism. If $\eta = g^* \omega$ where $\omega \in \omega_{A/S}$ we will set $\mu_\eta = g^* \mu_\omega$. This is independent of the choice of ω . As an immediate consequence of the previous corollary we obtain:

COROLLARY 2.2.5. *Let U, z, s and v be as above. Set $X(S)' = \{t \in X(S) : t \text{ meets } U \text{ and } t^* v \neq 0\}$. Then there exist maps*

$$V = : V_{z, v} : T_{U, v} \rightarrow K(S)^4$$

and

$$L = : L_{z, v, s} : \omega_{X/S} \rightarrow K(X)^4$$

such that L is K -linear and for $t \in X(S)'$ and $\omega \in g^* \omega_{A/S}$,

$$\mu_\omega(s, t) = t^*(L(\omega) \cdot V(t)) .$$