LE PROBLÈME FACILE DE WARING

L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 223-234

LE PROBLÈME FACILE DE WARING

par Philippe REVOY

SUMMARY. THE EASIER WARING PROBLEM. In the ill-named easier Waring problem, the knowledge of the function $\upsilon(k)$ is far from precise. Except the trivial majoration $G(k) + 1$, we only have rather large majorations for small k. In this note, I first give the classical facts and the particular cases $k = 4$ and $k = 5$ and I give certain new identities which arose in a paper of L. Vaserstein who gave a better bound for $\upsilon(8)$. We finish by a short description of the Tarry-Escott problem which is, for $k \geqslant 9$, the only way to get effective majorations of $\upsilon(k)$.

Dans le problème, nommé à tort facile de Waring, la connaissance de la fonction $\upsilon(k)$ reste encore imprécise: à l'exception de la majoration évidente par $G(k) + 1$, on ne dispose que de majorations assez larges pour les premières valeurs de l'exposant k. Dans cet article, après avoir repris les généralités classiques et les cas particuliers $k = 4$ et $k = 5$, je donne certaines identités nouvelles englobant en la simplifiant une identité due à Vaserstein qui a amélioré ainsi l'encadrement de $\upsilon(8)$ et je termine par des indications sur le problème de Tarry-Escott qui est pour $k \geqslant 9$ la seule source des autres majorations connues de $\upsilon(k)$.

INTRODUCTION

Soit $\upsilon(k)$ le plus petit entier s tel que tout entier est somme de s entiers de la forme $\pm z^k$, z entier. L'existence de $\upsilon(k)$ pour tout k s'établit facilement mais la détermination exacte de $\upsilon(k)$ — le problème «facile» de Waring — est délicate. Seuls $\upsilon(1) = 1$ et $\upsilon(2) = 3$ sont connus; pour les valeurs supérieures, on ne dispose que d'encadrement souvent larges. Ainsi $4 \leqslant \upsilon(3) \leqslant 5$, $9 \leqslant \upsilon(4) \leqslant 10$, $\upsilon(5) \in [5, 10]$, $\upsilon(6) \in [6, 14]$, $\upsilon(8) \in [17, 28]$, ... ([2], [8]).

L'existence de $\upsilon(k)$ découle de l'identité suivante:

$$(1) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^{k-1-h} C_{k-1}^{h} (x+h)^k = k!x + c_k$$

pour $k \geqslant 2, c_k \in \mathbf{Z}$. Tout entier n s'écrit $k!x + c_k + m$ où $|m| \leqslant \frac{1}{2} k!$, et m est somme d'au plus $\frac{1}{2} k!$ termes 1^k ou bien -1^k, d'où l'existence et la majoration grossière $\upsilon(k) \leqslant 2^{k-1} + \frac{1}{2} k!$, qui est une égalité pour $k = 2$.

L'existence de la constante asymptotique $G(k)$ du problème de Waring (tout grand nombre est somme d'au plus $G(k)$ puissances $k^{\text{ièmes}}$ d'entiers) donne: $\upsilon(k) \leqslant G(k) + 1$. Pour tout entier n, choisissant N très grand, $n + N^k$ sera somme d'au plus $G(k)$ puissances $k^{\text{ième}}$, d'où le résultat et la majoration $\upsilon(k) = O(k \operatorname{Log} k)$ d'après les résultats de Vinogradov ([1]), où les constantes sont effectives. Cette majoration reste médiocre pour les petites valeurs de k où nous avons des majorations plus précises.

1. La méthode générale suivie ([2], [3]) est en fait de travailler sur les deux côtés: améliorer l'identité (1) pour obtenir un nombre de termes inférieur à 2^{k-1} (possible si $k > 3$) et utiliser des congruences pour améliorer le terme $\frac{1}{2} k!$. Pour n et k des entiers fixés, on pose égal à $\Delta(k;n)$ le plus petit entier s tel que pour tout m la congruence $m \equiv \pm x_1^k \pm x_2^k \pm \ldots \pm x_s^k (n)$ a au moins une solution.

L'existence de $\Delta(k;n)$ est évidente, avec la majoration $\Delta(k;n) \leqslant \upsilon(k)$ puisque toute égalité donne une congruence quel que soit le module. Une fonction intéressante est $\Delta(k) = \sup_n \Delta(k;n)$ qui est inférieure ou égale à $\upsilon(k)$, seul moyen d'obtenir des minorations de $\upsilon(k)$. Le calcul de $\Delta(k;n)$ peut se faire en utilisant la décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_h^{\alpha_h}$: on a alors $\Delta(k;n) = \sup_i \Delta(k;p_i^{\alpha_i})$. Si p_i ne divise pas k, $\Delta(k;p_i^{\alpha_i}) = \Delta(k;p_i) \leqslant k$ en utilisant le lemme de Hensel puis le théorème de Chevalley; si p divise k, la suite $i \mapsto \Delta(k;p^i)$ est stationnaire pour $i \geqslant i_0$ dépendant de l'entier $\upsilon_p(k)$, encore une fois d'après le lemme de Hensel. Les résultats les plus simples sont, par exemple

LEMME. $\Delta(3) = 4, \Delta(2^n) = 2^{n+1}$ *si* $n \geqslant 2$. *Si* $2k + 1$ *est premier,* $\Delta(k; 2k+1) \geqslant k$.

La première affirmation provient de l'étude de x^3 modulo 9. Pour la seconde, il suffit de calculer $\pm x^{2^n}$ modulo 2^{n+2} ([8]). Pour la troisième, comme $p = 2k + 1$ est premier $x^k \equiv \left(\frac{x}{p}\right) \bmod p$ où le second membre est 0, $\pm$ 1, le symbole de Legendre.

En ce qui concerne les identités, soit une égalité

$$\sum_{i=1}^{h} \pm P_i(x)^k = Ax + B \tag{2}$$

où $A \neq 0$ et où les P_i sont des polynômes à coefficients rationnels et à valeurs entières. On pose $v_*(k)$ le plus petit des entiers h tel qu'il existe une identité (2) avec h polynômes P_i: la finitude de $v_*(k)$ provient de (1) et on a $v_*(k) \leqslant 2^{k-1}$. L'essentiel des résultats obtenus provient de

PROPOSITION. $v(k) \leqslant v_*(k) + \Delta(k; A) \leqslant v_*(k) + \Delta(k)$.

C'est un décalque de la démonstration de l'introduction. Notons que le remplacement de $\Delta(k; A)$ par $\Delta(k)$ peut se traduire par une perte nette. Ainsi, si $k = 5$, l'une ou l'autre des deux identités suivantes

$$\begin{aligned}(x+3)^5 - 2(x+2)^5 + x^5 + (x-1)^5 - 2(x-3)^5 \\ + (x-4)^5 = 720x - 360\end{aligned} \tag{3}$$

ou

$$\begin{aligned}(x+3)^5 + (x-3)^5 - (x+1)^5 - (x-1)^5 + 2(2x)^5 \\ - (2x+1)^5 - (2x-1)^5 = 780x\end{aligned} \tag{4}$$

qui donnent $v_*(5) \leqslant 8$ fournissent aussi, du fait de $\Delta(5; 720) = \Delta(5; 780) = 2$, la majoration $v(5) \leqslant 10 = 8 + 2$ alors que $\Delta(5) \geqslant \Delta(5; 11) = 5$. L'identité (3) est classique ([2]); l'identité (4) et d'autres seront données dans les paragraphes suivants. Pour le cas de l'exposant 3, le lecteur peut se reporter à [7] où l'essentiel des résultats connus est démontré avec des références bibliographiques.

2. Etude des bicarrés

L'encadrement $9 \leqslant v(4) \leqslant 10$ est dû à W. Hunter ([3]); nous allons en donner une présentation différente. Comme, modulo 16, $x^4 \equiv 0$ ou 1, tout entier de la forme $16n + 8$ nécessite au moins 8 bicarrés, tous de même signe; comme 24 n'est pas somme de huit bicarrés, $v(4) \geqslant 9$. Le même raisonnement ([8]) s'applique à toute puissance de 2: $v(2^n) \geqslant 2^{n+1} + 1, n \geqslant 2$. L'inégalité $v(4) \leqslant 10$ est plus délicate.

Ainsi on a:

$$(x+8)^4 - (x-8)^4 + (2x-1)^4 - (2x+1)^4 = 4080x \; . \tag{5}$$

Comme $4080 = 16 \times 3 \times 5 \times 17$ et que modulo 3, modulo 5 et modulo 17 tout entier est somme algébrique d'au plus trois bicarrés, on a le

Lemme. *Tout entier de l'une des formes suivantes:* $16m, 16m \pm k$, $k \in \{1,2,3\}$ *est somme algébrique d'au plus 7 bicarrés.*

Nous allons maintenant utiliser une identité (2) due à W. Hunter, avec $h = 7$, $\max d^\circ P_i = 2$ et $Ax + B = 48x + 4$, dont nous donnons la genèse. Soit P un polynôme à valeurs entières:

$$(P+1)^4 + (P-1)^4 - 2P^4 = 12P^2 + 2 \; .$$

Si P est de degré pair, le degré du second membre sera multiple de 4 et on peut chercher des polynômes à valeurs entières Q_i tels que

$$12P^2 + 2 - \sum_{i=1}^{t} Q_i^4 = Ax + B \; ,$$

soit si $A \neq 0$ une identité à $t + 4$ termes. Nous prenons ici $P(x) = 2x^2 + bx + c$ et $Q_i(x) = 2x + \alpha_i$, $i = 1,2,3$, choix qui donne les relations

$$\begin{cases} 32\,\Sigma\,\alpha_i = 48b \\ 24\,\Sigma\,\alpha_i^2 = 12(b^2+4c) \; . \end{cases}$$

Il est clair que b doit être pair et en simplifiant les deux relations par 32 et par 24, comme $\Sigma\,\alpha_i$ et $\Sigma\,\alpha_i^2$ ont même parité, b doit être multiple de 4. Un changement de variables donne $b = 0$ donc de $\alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ résulte $c = \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2$ et le second membre est

$$Ax + B = 24\,\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)x + 10(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)^2 + 2 \; .$$

Le coefficient A est toujours un multiple de 48; le coefficient B ne peut être que 2 ou $\pm$ 4 modulo 16, ce dernier cas étant intéressant: ainsi, en choisissant $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 1)$

$$(6) \qquad \begin{aligned}(2x^2+4)^4 + (2x^2+2)^4 - 2(2x^2+3)^4 - (2x-2)^4 \\ - 2(2x+1)^4 = 48(x+2) - 4 \,.\end{aligned}$$

Cette identité permet de montrer

LEMME. *Tous les entiers de la forme* $16m \pm k$, $k \in \{4, 5\}$ *sont somme d'au plus 8 bicarrés. Ceux de la forme* $16m \pm 6$ *sont somme d'au plus 9 bicarrés.*

Pour obtenir la première partie du lemme, il suffit d'ajouter ou de retrancher à $48X \pm 4$ l'un des trois nombres 1^4, 2^4 ou 3^4. Pour la seconde, il suffit d'utiliser la première partie et 1^4. Ces deux lemmes donnent la

PROPOSITION. *Parmi 16 entiers consécutifs, 13 au moins sont somme d'au plus 9 bicarrés.*

Pour obtenir $v(4) \leqslant 10$, les nombres de la forme $16m \pm 7$ ne posent pas de problème. Pour ceux de la forme $16m + 8$, W. Hunter fournit des identités à dix termes:

$$(7) \qquad \begin{aligned}24(y+10319691) = (y^2+625)^4 + (y^2+603)^4 - (y^2+626)^4 \\ - (y^2+602)^4 + (4y+11)^4 + (2y-87)^4 + (y+125)^4 + (y-9)^4 \\ + (y-41)^4 + (y-83)^4\end{aligned}$$

et

$$(8) \qquad \begin{aligned}24(y+120858614086) - 8 = (y^2+39873)^4 + (y^2+39851)^4 \\ - (y^2+39874)^4 - (y^2+39850)^4 + (4y+11)^4 + (2y-87)^4 \\ + (y+1017)^4 + (y+883)^4 + (y-933)^4 + (y-975)^4\end{aligned}$$

qui donne le théorème $v(4) \leqslant 10$. L'origine de ces identités est analogue, bien que plus compliquée, à celle de (6). On considère, h et k étant entiers, $\Delta_{h,k}(P) = (P+h+k)^4 - (P+h)^4 - (P+k)^4 + P^4$ du second degré en P; il faut choisir h et k et les polynômes Q_i de sorte que

$$\Delta_{h,k}(P) - \sum_{i=1}^{6} Q_i^4 = Ax + B \,.$$

Remarquons que, dans l'identité (8), si y est pair tous les polynômes ayant le signe + sont impairs (il y en a 8) et tous les polynômes ayant le signe moins sont pairs: les nombres représentés sont donc de la forme $16m + 8$. Pour pouvoir éventuellement montrer que $v(4) = 9$, ou au moins que les nombres $16m \pm 7$ sont somme d'au plus neuf bicarrés, il faut obtenir des identités où le nombre de polynômes précédés du signe $+$ et celui des polynômes précédés du signe $-$ sont très différents et il faut que beaucoup des premiers prennent des valeurs impaires, tous les autres prenant des valeurs paires. Ainsi on peut espérer pour B un résidu modulo 16 le plus élevé possible par rapport au nombre total h de polynômes. Ainsi on pourrait envisager de chercher une identité de la forme

$$(P+\alpha)^4 - P^4 + \sum_{i=1}^{s} Q_i^4 = Ax + B, \tag{9}$$

avec α impair, P prenant des valeurs paires et les Q_i des valeurs impaires. Alors on aurait $B \equiv s + 1$ (16) ce qui fournirait des identités utilisables pour les nombres de la forme $16m \pm 7$ et ± 8. Cependant, comme $d^\circ((P+\alpha)^4 - P^4) \equiv 0(3)$, il faut que le degré de P soit un multiple de 4 et que l'un des Q_i au moins soit de degré multiple de 3.

On peut obtenir d'autres identités avec des bicarrés; par exemple

$$\sum_{i=1}^{4} (a_i x + 1)^4 - (a_i x - 1)^4 = 8(\sum_i a_i)x \tag{10}$$

si $\sum_{i=1}^{4} a_i^3 = 0$, d'où des identités pour $48x$ avec les suites $(3, 4, 5, -6)$, $(10, 9, -12, -1)$, $(27, 16, -19, -18)$... (noter que $\Sigma a_i \equiv \Sigma a_i^3 (6)$ est toujours divisible par 6).

D'autres identités à 4, 5 ou 6 termes peuvent s'obtenir facilement à l'aide de solutions triviales ou non triviales des équations $\sum_{i=1}^{s} X_i^4 = \sum_{j=1}^{t} Y_j^4$ où les couples (s, t) sont $(2, 2)$, $(3, 2)$ ou $(3, 3)$.

3. Identités et problèmes de Tarry-Escott

L'identité (3), de degré 5, est le cas particulier d'identités beaucoup plus générales. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{s} (x + a_i)^k - \sum_{j=1}^{s} (x + b_j)^k = Ax + B \quad \text{avec} \quad A \neq 0 \tag{11}$$

si $\sum_i a_i^h = \sum_j b_j^h$ pour $1 \leqslant h \leqslant k-2$ et $\sum a_i^{k-1} \neq \sum b_j^{k-1}$.

On appelle $M(k)$ le plus petit entier h tel qu'il existe une identité (11): on a $v_*(k) \leqslant 2M(k)$.

La recherche de systèmes $(a_1, \ldots, a_s; b_1, \ldots, b_s)$ telles que (S_t): $\sum_i a_i^h = \sum_j a_j^h$ pour $h = 1, 2, \ldots, t$ constitue le problème de Tarry-Escott ([2], [9]). Remarquons que (S_t) équivaut à l'égalité des t premières fonctions symétriques élémentaires des s-uples (a_i) et (b_j): si $t \geqslant s$ alors les a_i et les b_j sont égaux, à une permutation près. Ainsi dans (11), la condition $\Sigma a_i^{k-1} \neq \Sigma b_j^{k-1}$ ne peut être satisfaite que si $s > k-2$. Désignons par $p(k)$ le plus petit des entiers $s > k$ tel qu'il existe deux s-uples différents ayant les mêmes fonctions symétriques élémentaires de degré $1, 2, \ldots, k$. La conjecture dans ce problème est que $p(k) = k+1$, résultat qui n'est connu que par des exemples numériques pour $k \leqslant 10$. Il est conjecturé que $p(k-2) = M(k)$: on a clairement l'inégalité $p(k-2) \leqslant M(k)$, mais on sait seulement montrer l'alternative: $p(k-2) = p(k-1)$ ou bien $p(k-2) = M(k)$.

En particulier $p(k-2) = M(k)$ si et seulement si la suite $p(k)$ est strictement croissante, ce qui n'est pas démontré. Tous les exemples numériques de s-uples donnant des majorations de $p(k)$, par exemple pour $k \leqslant 30$ fournissent en fait des majorations de $M(k)$ et permettent de l'utiliser pour majorer $v_*(k)$. De cela, découle par exemple les majorations $v_*(6) \leqslant 10$, $v_*(7) \leqslant 12$ et $v_*(8) \leqslant 14$. Avec $\Delta(8) \leqslant 16$, ceci donne $v(8) \leqslant 30$. Dans une courte note ([8], L. Vaserstein montre en fait que $v_*(8) \leqslant 12$ et rappelle une identité donnant $v_*(6) \leqslant 8$. Nous allons maintenant en donner l'idée, obtenant ainsi une identité plus simple que celle de [8].

Soient $4n$ entiers positifs

$$a_i, b_i, a_j', b_j', 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

et

$$S(x) = \sum_i (a_i x + b_i)^{2k} - (a_i x - b_i)^{2k} + \sum_j (a_j' x - b_j')^{2k} - (a_j' x + b_j')^{2k} :$$

c'est un polynôme impair en x dont les coefficients sont des multiples entiers des sommes

$$S_h = \sum_i a_i^{2k-(2h+1)} b_i^{2h+1} - \sum_i a_i'^{2k-(2h+1)} b_i'^{2h+1}, \ h = 0, 1, \ldots, k-1 .$$

Le polynôme S sera du premier degré, et non nul, si $S_0 = S_1 = \dots = S_{k-2} = 0$ et $S_{k-1} \neq 0$. Pour annuler $S_0, \dots, S_{k-2}$, il suffit d'imposer les relations: pour $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} &a_i^{2k-1} b_i = a_i'^{2k-1} b_i' \dots \\ &a_i^{2k-(2h+1)} b_i^{2h+1} = a'^{2k-(2h+1)}_{s_h(i)} b'^{2h+1}_{s_h(i)}, \quad h = 1, \dots, k-2 \end{aligned}$$

où s_h est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ sans points fixes telles que $s_{h_1}(i) \neq s_{h_2}(i)$ pour tout i et $h_1 \neq h_2$ (sinon on aurait $a_i^{\alpha_k} b_i^{\beta_k} = a_j'^{\alpha_k} b_j^{\beta_k}$ pour deux couples (α_k, β_k) non proportionnels, d'où $\dfrac{a_i}{a_j'} = \left(\dfrac{b_j'}{b_i}\right)^{r_k}$ pour deux rationnels r_1 et r_2 différents ce qui donne $a_i = a_j'$ et $b_i = b_j'$). On peut prendre par exemple pour s_h la puissance $h^{\text{ième}}$ de la permutation circulaire $i \mapsto i+1$ modulo n. Il y a $4n$ paramètres et $n(k-1)$ relations de sorte que $2 \leqslant k \leqslant 4$ et nous obtenons ainsi des identités de degré 4, 6 ou 8.

En degré 4, $(ax+b)^4 - (ax-b)^4 + (cx-d)^4 - (cx+d)^4 = Ax$ avec $A = 8(ab^3 - cd^3)$ si $a^3 b = c^3 d$. Là, une analyse directe permet de supposer $(a, c) = 1$. Alors $b = rc^3$ et $d = ra^3$ d'après le lemme d'Euclide; choisissant $a = 1$, $c = 2$ et $r = 1$, on obtient (5) et aucun choix de a, c et r ne permet d'obtenir de meilleure identité.

En degré 6, il y a 8 paramètres liés par les 4 relations: $a_i^5 b_i = a_i'^5 b_i'$ et $a_i^3 b_i^3 = a'^3_{i+1} b'^3_{i+1}$, $i = 1, 2$.

En passant au logarithme on obtient le système linéaire homogène

$$i = 1, 2, \begin{cases} 5a_i + b_i - 5a_i' - b_i' = 0 \\ a_i + b_i - a'_{i+1} - b'_{i+1} = 0\,, \end{cases}$$

où les 8 inconnues sont encore notées a_i, a_i', b_i, b_i'.

L'espace des solutions, de dimension 4, est formé des vecteurs

$$\begin{aligned} &(a_1, b_1, a_2, b_2, a_1', b_1', a_2', b_2') \\ &= (u+v, 5w+h, u+w+h, v, u+v+w, h, u+h, v+5w), \end{aligned}$$

u, v, w et h étant des scalaires. En repassant à l'exponentielle et en remplaçant ux par x, on obtient

$$\begin{aligned} &(vx + w^5 h)^6 + (whx + v)^6 - (vx - w^5 h)^6 - (whx - v)^6 \\ &+ (vwx - h)^6 + (hx - vw^5)^6 - (vwx + h)^6 - (hx + vw^5)^6 \\ &= 12 vwh(h^4 - v^4)(w^{24} - 1)x\,, \end{aligned} \tag{12}$$

identité de Rao qu'on peut rendre homogène.

En degré 8, il y a 12 variables et 9 relations:

$$a_i^7 b_i = a_i'^7 b_i'; a_i^5 b_i^3 = a_{i+1}'^5 b_{i+1}'^3 \quad \text{et} \quad a_i^3 b_i^5 = a_{i+2}'^3 b_{i+2}'^5 ,$$

$i = 1,2,3$. En linéarisant, on obtient un système homogène de 9 équations linéaires à 12 inconnues encore notées (a_i, a_i', b_i, b_i'); l'espace vectoriel des solutions, de dimension au moins 3, contient le plan engendré par les vecteurs $(a_i = a_j' = 1; b_i = b_i' = 0)$ et $(a_i = a_j' = 0; b_i = b_i' = 1)$. Il suffit de trouver les solutions du système vérifiant $a_1 = b_1' = 0$; la première équation devient $b_1 - 7a_1' = 0$ et on prend a_1' comme paramètre d'où un système de huit équations à huit inconnues $a_i, a_i', b_i, b_i', i \geqslant 2$. Le rang du système est 7 et sa résolution donne deux autres solutions indépendantes du système initial

$$(5,6,0,6,5,0;7,0,10,0,7,10)$$

et

$$(0,5,6,0,6,5;10,7,0,10,0,7) ,$$

ce qui donne, en rendant homogène

$$\begin{aligned}
&(a^5c^{12}x + a^7b^{10})^8 + (a^6b^5c^6x + b^7c^{10})^8 + (b^6c^{11}x + a^{10}c^7)^8 \\
&- (a^5c^{12}x - a^7b^{10})^8 - (a^6b^5c^6x - b^7c^{10})^8 - (b^6c^{11}x - a^{10}c^7)^8 \\
&+ (a^6c^{11}x - b^{10}c^7)^8 + (a^5b^6c^6x - a^7c^{10})^8 + (b^5c^{12}x - a^{10}b^7)^8 \\
&- (a^6c^{11}x + b^{10}c^7)^8 - (a^5b^6c^6x + a^7c^{10})^8 - (b^5c^{12}x + a^{10}b^7)^8 \\
&= 16a^6b^6c^{12}(c^{16} - a^{16})(c^{16} - b^{16})(b^{16} - a^{16})Rx
\end{aligned} \tag{13}$$

où R est la somme de six monômes: $\Sigma a^{32}b^{32} + \Sigma a^{32}b^{16}c^{16}$.

Cette identité est de degré total 136 en a, b, c alors que l'identité analogue de [8] est de degré 1128; cela permet donc de dire que $v_*(8) \leqslant 12$ et $v(8) \leqslant 28$ comme le dit le titre de [8].

En degré 10 et plus, nous n'avons pas de tel schéma de simplification; cependant la construction précédente donne des identités en degré 5, 7 et 9 mais de longueur trop grande en degré 7 et 9 et qui en degré 5 donne par exemple l'identité (4). Nous partons en degré 5 de

$$\begin{aligned}
P_{a,b,c}(x) &= (ax+b)^5 - (ax+b)^5 + (ax-c)^5 - (ax+c)^5 \\
&= C_5^3 a^3(b^2-c^2)x^3 + C_5^1 a(b^4-c^4)x \quad \text{et} \quad P_{a,b,c}(x) - \mathrm{P}_{a',b',c'}(x)
\end{aligned}$$

est un polynôme du premier degré si et seulement si

$$a^3(b^2 - c^2) = a'^3(b'^2 - c'^2 2) .$$

On peut faire plusieurs choix des six paramètres: $a' = 2, a = c = b' = 1$, $b = 3$ et $c' = 0$ donne l'identité (4). On peut aussi prendre

$$a = k\alpha\beta,\ a' = k\alpha'\beta',\ b = \frac{1}{2}(\alpha'^3 + \beta'^3),\ c = \frac{1}{2}(\alpha'^3 - \beta'^3)\ ,$$

$$b' = \frac{1}{2}(\alpha^3 + \beta^3),\ c' = \frac{1}{2}(\alpha^3 - \beta^3)\ ,$$

ce qui donne une identité plus complexe. On peut aussi choisir $c = c' = 0$ et linéariser la relation $a^3 b^2 = a'^3 b'^2$, d'où l'identité

$$\begin{aligned}(14)\qquad &(x + vw^3)^5 + (x - vw^3)^5 - (w^2 x + v)^5 - (w + 2x - v)^5 + 2(w^2 x)^5 \\ &\qquad - 2x^5 = 10v^4 w^2 (w^{10} - 1)x\ ,\end{aligned}$$

identité de longueur 8 (on remarquera que le coefficient A de x du second membre est toujours un multiple de 11 car $w^{12} - w^2 \equiv 0(11)$ et que $\Delta(5;11) = 5 > \Delta(5;720)$ ou $\Delta(5;780)$).

En degré 7, on considère une somme

$$\sum_{i=1}^{2} P_{a_i, b_i, c_i} - P_{a'_i, b'_i, c'_i}$$

on pose alors $c_i = c'_j = 0$ et on a les quatre relations

$$a_i^5 b_i^2 = a_i'^5 b_i'^2 \qquad \text{et} \qquad a_i^3 b_i^4 = a_{i+1}'^3 b_{i+1}'^4$$

ce qui donne finalement l'identité

$$\begin{aligned}(15)\qquad &(b^4c^4 x \pm ab^5c^3)^7 + (b^2c^4x \pm ab^3c^{10})^7 - (b^6x \pm ac^{13})^7 - (c^8x \pm ab^8)^7 \\ &\quad + 2x^7(b^{42} + c^{56} - b^{28}c^{28} - b^{14}c^{28}) = 14ab^8c^{13}(b^{21} - c^{21})(c^{14} - b^7)x\end{aligned}$$

dont le premier membre contient 16 puissances septièmes, ce qui est supérieur à $v_*(7) \leqslant 2M(7) = 12$.

De même en degré 9, on partira de

$$\sum_{i=1}^{3} P_{a_i, b_i, 0} - P_{a'_i, b'_i, 0}$$

et on obtient par la même méthode (système linéaire de 9 équations à 12 inconnues) une identité dont le premier membre est la somme de 24 puissances 9$^{\text{èmes}}$. Les coefficients a_i, a'_j, b_i, a'_j sont donnés dans le tableau suivant:

	a	a'	b	b'
1	v^8	v^6	uw^{10}	uv^7w^{10}
2	w^6	w^8	$uv^{10}w^7$	uv^{10}
3	v^6w^8	v^8w^6	uv^7	uw^7

Le coefficient de x de second membre est $A = 18u^8v^8w^8(w^{18} - v^{18})Q(v, w)$ où Q est le polynôme

$$Q(x, y) = x^{54} + y^{54} - x^{54}y^{54} + x^{36} + y^{36} + x^{18y18} + x^{36}y^{18} + x^{18}y^{36} .$$

La longueur de l'identité est 24 ce qui la rend pratiquement inutile.

5. Retour sur le problème de Tarry-Escott

En degré k suffisamment petit, beaucoup d'identités et donc de majoration de $v_*(k)$ proviennent de s-uples $(a_1, ..., a_s)$ et $(b_1, ..., b_s)$ dont les $k - 2$ premières fonctions symétriques élémentaires coïncident. On écrira alors suivant une notation classique dans cette question $[a_1, ..., a_s]_{k-2} = [b_1, b_2, ..., b_s]_{k-2}$. La recherche systématique de tels s-uples se fait en général inductivement, à l'aide des deux opérations suivantes ([4], [6]).

Lemme. *Si* $[a_1, ..., a_r]_k = [b_1, ..., b_r]_k$, *alors quel que soit* x

1) $$[a_1, ..., a_r, b_1 + x, b_2 + x, ..., b_{r+x}]_{k+1} = [a_1 + x, a_2 + x, ..., a_r + x, b_1, b_2, ..., b_r]_{k+1} .$$

2) $$[a_1, ..., a_r, a_1 + x, ..., a_r + x]_k = [b_1, ..., b_r, b_1 + x, ..., b_r + x]_k .$$

Naturellement la longueur des s-uples déduit par le procédé récurrent est le double des s-uples de départ mais un choix judicieux peut permettre de réduire cette longueur: en effet chaque fois que l'on a $a_i + x = a_j$ (resp. $b_u + x = b_v$) on pourra supprimer dans l'égalité des deux crochets, les termes égaux, aussi pour appliquer la règle en question on calcule $\{a_i - a_j / i > j\}$ et $\{b_i - b_j / i > j\}$ et on choisit pour x l'un des entiers qui est le plus souvent une différence de deux a_i et de deux b_i. Ainsi partant de $[0, 3]_1 = [1, 2]_1$ en ajoutant 3 puis 5 puis 7, on trouve $[0, 4, 5]_2 = [1, 2, 6]_2$, $[0, 4, 7, 11]_3 = [1, 2, 9, 10]_3$ et $[0, 4, 8, 16, 17]_4 = [1, 2, 10, 14, 18]_4$ ce qui montre que $p(k) = k + 1$ pour $k \leqslant 4$ et que $v_*(k) = 2(k - 1)$ pour $k \leqslant 6$. On peut développer cette technique et s'essayer à trouver de nombreux exemples de s-uples vérifiant $[a_1, ..., a_s]_h = [b_1, ..., b_s]_h$ mais il n'est pas évident de minimaliser s par rapport à h.

On peut aussi opérer littéralement en partant de $[a, b]_1 = [c, a + b - c]_1$ en prenant x dans le $\mathbf{Z}$-module libre de base (a, b, c). On prend $x = b - a$ d'où $[a, b + c - a, 2b - c]_2 = [c, a + b - c, 2b - a]_2$; ensuite on peut prendre $y = a - 2b + c$ d'où

$$[b + c - a, 2b - c, a - 2b + 2c, 2a - b]_3$$
$$= [2b - a, a + b - c, 2a - 2b + c, - b + 2c]_3$$

ce qui fournit une famille d'identités

$$\sum_{i=1}^{4} (x + a_i)^5 - (x + b_i)^5 = Ax + B$$

où A est un polynôme homogène de degré 4. L'identité (3) en est un cas particulier provenant de $[0, 3, 4, 7]_3 = [1, 1, 6, 6]_3$ qu'on peut obtenir à partir de $[0, 4, 5]_2 = [1, 2, 6]_2$ en ajoutant 1 (au lieu de 7). L'existence de plusieurs choix possibles pour x rajoute à la difficulté d'une étude systématique qui pour l'instant n'a fourni ainsi que des exemples. On trouvera dans [9] des références bibliographiques ainsi que des majorations explicites pour $p(k)$ et $M(k)$ définis dans la partie précédente.

RÉFÉRENCES

[1] Ellison, W. J. Waring's problem. *Amer. math. monthly 78* (1971), 10-36.
[2] Hardy, G. H. and E. M. Wright. *An introduction to the Theory of Numbers.* 4e édition, Clarendon Press, Oxford (1960).
[3] Hunter, W. The representation of numbers by sums of fourth powers. *J. Lon. Math. Soc. 16* (1941), 143-145.
[4] Mehrotra, S. N. On sums of powers. *Mathematics Student 35* (1967), 73-77, *37* (1969), 204-205.
[5] Mordell, L. J. *Diophantine equations.* Academic Press, London and New York (1968).
[6] Rai, T. Easier Waring problem. *J. Sci. Res. Benares Hindu Univ. 1* (1951), 5-19.
[7] Revoy, Ph. Sur les sommes de quatre cubes. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 209-220.
[8] Vaserstein, L. N. Every integer is a sum or difference of 28 integral eighth powers. *J. of Numb. Th. 28* (1988), 66-68.
[9] Wright, E. M. Equal sums of like powers. *Cand. Math. Bull. 8* (1965), 193-202.

(Reçu le 27 décembre 1990)

Philippe Revoy
Département des Sciences Mathématiques
Université Montpellier II
Plage Eugène-Bataillon
F-34095 Montpellier Cedex 5 (France)