Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1991)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME FACILE DE WARING
Autor: Revoy, Philippe
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58740

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 223-234

LE PROBLÈME FACILE DE WARING

par Philippe REVOY

SUMMARY. THE EASIER WARING PROBLEM. In the ill-named easier Waring problem, the knowledge of the function $v(k)$ is far from precise. Except the trivial majoration $G(k) + 1$, we only have rather large majorations for small k. In this note, I first give the classical facts and the particular cases $k = 4$ and $k = 5$ and I give certain new identities which arose in a paper of L. Vaserstein who gave a better bound for $v(8)$. We finish by a short description of the Tarry-Escott problem which is, for $k \geqslant 9$, the only way to get effective majorations of $v(k)$.

Dans le problème, nommé à tort facile de Waring, la connaissance de la fonction $v(k)$ reste encore imprécise: à l'exception de la majoration évidente par $G(k) + 1$, on ne dispose que de majorations assez larges pour les premières valeurs de l'exposant k. Dans cet article, après avoir repris les généralités classiques et les cas particuliers $k = 4$ et $k = 5$, je donne certaines identités nouvelles englobant en la simplifiant une identité due à Vaserstein qui a amélioré ainsi l'encadrement de $v(8)$ et je termine par des indications sur le problème de Tarry-Escott qui est pour $k \geqslant 9$ la seule source des autres majorations connues de $v(k)$.

INTRODUCTION

Soit $v(k)$ le plus petit entier s tel que tout entier est somme de s entiers de la forme $\pm z^k$, z entier. L'existence de $v(k)$ pour tout k s'établit facilement mais la détermination exacte de $v(k)$ — le problème «facile» de Waring — est délicate. Seuls $v(1) = 1$ et $v(2) = 3$ sont connus; pour les valeurs supérieures, on ne dispose que d'encadrement souvent larges. Ainsi $4 \leqslant v(3) \leqslant 5$, $9 \leqslant v(4) \leqslant 10$, $v(5) \in [5, 10]$, $v(6) \in [6, 14]$, $v(8) \in [17, 28], \ldots$ ([2], [8]).

L'existence de $v(k)$ découle de l'identité suivante:

$$(1) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} (-1)^{k-1-h} C_{k-1}^{h} (x+h)^k = k!x + c_k$$

pour $k \geqslant 2, c_k \in \mathbf{Z}$. Tout entier n s'écrit $k!x + c_k + m$ où $|m| \leqslant \frac{1}{2}k!$, et m est somme d'au plus $\frac{1}{2}k!$ termes 1^k ou bien -1^k, d'où l'existence et la majoration grossière $v(k) \leqslant 2^{k-1} + \frac{1}{2}k!$, qui est une égalité pour $k = 2$.

L'existence de la constante asymptotique $G(k)$ du problème de Waring (tout grand nombre est somme d'au plus $G(k)$ puissances $k^{\text{ièmes}}$ d'entiers) donne: $v(k) \leqslant G(k) + 1$. Pour tout entier n, choisissant N très grand, $n + N^k$ sera somme d'au plus $G(k)$ puissances $k^{\text{ième}}$, d'où le résultat et la majoration $v(k) = O(k \operatorname{Log} k)$ d'après les résultats de Vinogradov ([1]), où les constantes sont effectives. Cette majoration reste médiocre pour les petites valeurs de k où nous avons des majorations plus précises.

1. La méthode générale suivie ([2], [3]) est en fait de travailler sur les deux côtés: améliorer l'identité (1) pour obtenir un nombre de termes inférieur à 2^{k-1} (possible si $k > 3$) et utiliser des congruences pour améliorer le terme $\frac{1}{2}k!$. Pour n et k des entiers fixés, on pose égal à $\Delta(k;n)$ le plus petit entier s tel que pour tout m la congruence $m \equiv \pm x_1^k \pm x_2^k \pm \ldots \pm x_s^k (n)$ a au moins une solution.

L'existence de $\Delta(k;n)$ est évidente, avec la majoration $\Delta(k;n) \leqslant v(k)$ puisque toute égalité donne une congruence quel que soit le module. Une fonction intéressante est $\Delta(k) = \sup_n \Delta(k;n)$ qui est inférieure ou égale à $v(k)$, seul moyen d'obtenir des minorations de $v(k)$. Le calcul de $\Delta(k;n)$ peut se faire en utilisant la décomposition en facteurs premiers $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_h^{\alpha_h}$: on a alors $\Delta(k;n) = \sup_i \Delta(k;p_i^{\alpha_i})$. Si p_i ne divise pas k, $\Delta(k;p_i^{\alpha_i}) = \Delta(k;p_i) \leqslant k$ en utilisant le lemme de Hensel puis le théorème de Chevalley; si p divise k, la suite $i \mapsto \Delta(k;p^i)$ est stationnaire pour $i \geqslant i_0$ dépendant de l'entier $v_p(k)$, encore une fois d'après le lemme de Hensel. Les résultats les plus simples sont, par exemple

LEMME. $\Delta(3) = 4$, $\Delta(2^n) = 2^{n+1}$ *si* $n \geqslant 2$. *Si* $2k+1$ *est premier,* $\Delta(k; 2k+1) \geqslant k$.

La première affirmation provient de l'étude de x^3 modulo 9. Pour la seconde, il suffit de calculer $\pm x^{2^n}$ modulo 2^{n+2} ([8]). Pour la troisième, comme $p = 2k+1$ est premier $x^k \equiv \left(\frac{x}{p}\right) \bmod p$ où le second membre est $0, \pm 1$, le symbole de Legendre.

En ce qui concerne les identités, soit une égalité

$$\sum_{i=1}^{h} \pm P_i(x)^k = Ax + B \tag{2}$$

où $A \neq 0$ et où les P_i sont des polynômes à coefficients rationnels et à valeurs entières. On pose $v_*(k)$ le plus petit des entiers h tel qu'il existe une identité (2) avec h polynômes P_i: la finitude de $v_*(k)$ provient de (1) et on a $v_*(k) \leqslant 2^{k-1}$. L'essentiel des résultats obtenus provient de

PROPOSITION. $v(k) \leqslant v_*(k) + \Delta(k; A) \leqslant v_*(k) + \Delta(k)$.

C'est un décalque de la démonstration de l'introduction. Notons que le remplacement de $\Delta(k; A)$ par $\Delta(k)$ peut se traduire par une perte nette. Ainsi, si $k = 5$, l'une ou l'autre des deux identités suivantes

$$\begin{aligned}(x+3)^5 - 2(x+2)^5 + x^5 + (x-1)^5 - 2(x-3)^5 \\ + (x-4)^5 = 720x - 360\end{aligned} \tag{3}$$

ou

$$\begin{aligned}(x+3)^5 + (x-3)^5 - (x+1)^5 - (x-1)^5 + 2(2x)^5 \\ - (2x+1)^5 - (2x-1)^5 = 780x\end{aligned} \tag{4}$$

qui donnent $v_*(5) \leqslant 8$ fournissent aussi, du fait de $\Delta(5; 720) = \Delta(5; 780) = 2$, la majoration $v(5) \leqslant 10 = 8 + 2$ alors que $\Delta(5) \geqslant \Delta(5; 11) = 5$. L'identité (3) est classique ([2]); l'identité (4) et d'autres seront données dans les paragraphes suivants. Pour le cas de l'exposant 3, le lecteur peut se reporter à [7] où l'essentiel des résultats connus est démontré avec des références bibliographiques.

2. Etude des bicarrés

L'encadrement $9 \leqslant v(4) \leqslant 10$ est dû à W. Hunter ([3]); nous allons en donner une présentation différente. Comme, modulo $16, x^4 \equiv 0$ ou 1, tout entier de la forme $16n + 8$ nécessite au moins 8 bicarrés, tous de même signe; comme 24 n'est pas somme de huit bicarrés, $v(4) \geqslant 9$. Le même raisonnement ([8]) s'applique à toute puissance de 2: $v(2^n) \geqslant 2^{n+1} + 1, n \geqslant 2$. L'inégalité $v(4) \leqslant 10$ est plus délicate.

Ainsi on a:

$$(x+8)^4 - (x-8)^4 + (2x-1)^4 - (2x+1)^4 = 4080x\,. \tag{5}$$

Comme $4080 = 16 \times 3 \times 5 \times 17$ et que modulo 3, modulo 5 et modulo 17 tout entier est somme algébrique d'au plus trois bicarrés, on a le

Lemme. *Tout entier de l'une des formes suivantes:* $16m$, $16m \pm k$, $k \in \{1,2,3\}$ *est somme algébrique d'au plus 7 bicarrés.*

Nous allons maintenant utiliser une identité (2) due à W. Hunter, avec $h = 7$, $\max d^\circ P_i = 2$ et $Ax + B = 48x + 4$, dont nous donnons la genèse. Soit P un polynôme à valeurs entières:

$$(P+1)^4 + (P-1)^4 - 2P^4 = 12P^2 + 2\,.$$

Si P est de degré pair, le degré du second membre sera multiple de 4 et on peut chercher des polynômes à valeurs entières Q_i tels que

$$12P^2 + 2 - \sum_{i=1}^{t} Q_i^4 = Ax + B\,,$$

soit si $A \neq 0$ une identité à $t + 4$ termes. Nous prenons ici $P(x) = 2x^2 + bx + c$ et $Q_i(x) = 2x + \alpha_i$, $i = 1,2,3$, choix qui donne les relations

$$\begin{cases} 32\,\Sigma\,\alpha_i = 48b \\ 24\,\Sigma\,\alpha_i^2 = 12(b^2+4c)\,. \end{cases}$$

Il est clair que b doit être pair et en simplifiant les deux relations par 32 et par 24, comme $\Sigma\,\alpha_i$ et $\Sigma\,\alpha_i^2$ ont même parité, b doit être multiple de 4. Un changement de variables donne $b = 0$ donc de $\alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ résulte $c = \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2$ et le second membre est

$$Ax + B = 24\,\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)x + 10(\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2)^2 + 2\,.$$

Le coefficient A est toujours un multiple de 48; le coefficient B ne peut être que 2 ou $\pm$ 4 modulo 16, ce dernier cas étant intéressant: ainsi, en choisissant $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 1)$

$$(6) \qquad \begin{aligned} (2x^2+4)^4 + (2x^2+2)^4 - 2(2x^2+3)^4 - (2x-2)^4 \\ - 2(2x+1)^4 = 48(x+2) - 4 \,. \end{aligned}$$

Cette identité permet de montrer

LEMME. *Tous les entiers de la forme* $16m \pm k$, $k \in \{4, 5\}$ *sont somme d'au plus 8 bicarrés. Ceux de la forme* $16m \pm 6$ *sont somme d'au plus 9 bicarrés.*

Pour obtenir la première partie du lemme, il suffit d'ajouter ou de retrancher à $48X \pm 4$ l'un des trois nombres 1^4, 2^4 ou 3^4. Pour la seconde, il suffit d'utiliser la première partie et 1^4. Ces deux lemmes donnent la

PROPOSITION. *Parmi 16 entiers consécutifs, 13 au moins sont somme d'au plus 9 bicarrés.*

Pour obtenir $v(4) \leqslant 10$, les nombres de la forme $16m \pm 7$ ne posent pas de problème. Pour ceux de la forme $16m + 8$, W. Hunter fournit des identités à dix termes:

$$(7) \qquad \begin{aligned} 24(y + 10319691) = (y^2+625)^4 + (y^2+603)^4 - (y^2+626)^4 \\ - (y^2+602)^4 + (4y+11)^4 + (2y-87)^4 + (y+125)^4 + (y-9)^4 \\ + (y-41)^4 + (y-83)^4 \end{aligned}$$

et

$$(8) \qquad \begin{aligned} 24(y + 120858614086) - 8 = (y^2+39873)^4 + (y^2+39851)^4 \\ - (y^2+39874)^4 - (y^2+39850)^4 + (4y+11)^4 + (2y-87)^4 \\ + (y+1017)^4 + (y+883)^4 + (y-933)^4 + (y-975)^4 \end{aligned}$$

qui donne le théorème $v(4) \leqslant 10$. L'origine de ces identités est analogue, bien que plus compliquée, à celle de (6). On considère, h et k étant entiers, $\Delta_{h,k}(P) = (P+h+k)^4 - (P+h)^4 - (P+k)^4 + P^4$ du second degré en P; il faut choisir h et k et les polynômes Q_i de sorte que

$$\Delta_{h,k}(P) - \sum_{i=1}^{6} Q_i^4 = Ax + B \,.$$

Remarquons que, dans l'identité (8), si y est pair tous les polynômes ayant le signe + sont impairs (il y en a 8) et tous les polynômes ayant le signe moins

sont pairs: les nombres représentés sont donc de la forme $16m + 8$. Pour pouvoir éventuellement montrer que $v(4) = 9$, ou au moins que les nombres $16m \pm 7$ sont somme d'au plus neuf bicarrés, il faut obtenir des identités où le nombre de polynômes précédés du signe $+$ et celui des polynômes précédés du signe $-$ sont très différents et il faut que beaucoup des premiers prennent des valeurs impaires, tous les autres prenant des valeurs paires. Ainsi on peut espérer pour B un résidu modulo 16 le plus élevé possible par rapport au nombre total h de polynômes. Ainsi on pourrait envisager de chercher une identité de la forme

$$(P+\alpha)^4 - P^4 + \sum_{i=1}^{s} Q_i^4 = Ax + B\,, \tag{9}$$

avec α impair, P prenant des valeurs paires et les Q_i des valeurs impaires. Alors on aurait $B \equiv s + 1$ (16) ce qui fournirait des identités utilisables pour les nombres de la forme $16m \pm 7$ et ± 8. Cependant, comme $d^\circ((P+\alpha)^4 - P^4) \equiv 0(3)$, il faut que le degré de P soit un multiple de 4 et que l'un des Q_i au moins soit de degré multiple de 3.

On peut obtenir d'autres identités avec des bicarrés; par exemple

$$\sum_{i=1}^{4} (a_i x + 1)^4 - (a_i x - 1)^4 = 8\,(\sum_i a_i)x \tag{10}$$

si $\sum_{i=1}^{4} a_i^3 = 0$, d'où des identités pour $48x$ avec les suites $(3, 4, 5, -6)$, $(10, 9, -12, -1)$, $(27, 16, -19, -18)$... (noter que $\Sigma a_i \equiv \Sigma a_i^3(6)$ est toujours divisible par 6).

D'autres identités à 4, 5 ou 6 termes peuvent s'obtenir facilement à l'aide de solutions triviales ou non triviales des équations $\sum_{i=1}^{s} X_i^4 = \sum_{j=1}^{t} Y_j^4$ où les couples (s, t) sont $(2, 2)$, $(3, 2)$ ou $(3, 3)$.

3. Identités et problèmes de Tarry-Escott

L'identité (3), de degré 5, est le cas particulier d'identités beaucoup plus générales. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{s} (x + a_i)^k - \sum_{j=1}^{s} (x + b_j)^k = Ax + B \quad \text{avec} \quad A \neq 0 \tag{11}$$

si $\sum_i a_i^h = \sum_j b_j^h$ pour $1 \leqslant h \leqslant k-2$ et $\sum a_i^{k-1} \neq \sum b_j^{k-1}$.

On appelle $M(k)$ le plus petit entier h tel qu'il existe une identité (11): on a $v_*(k) \leqslant 2M(k)$.

La recherche de systèmes $(a_1, \ldots, a_s; b_1, \ldots, b_s)$ telles que (S_t): $\sum_i a_i^h = \sum_j a_j^h$ pour $h = 1, 2, \ldots, t$ constitue le problème de Tarry-Escott ([2], [9]). Remarquons que (S_t) équivaut à l'égalité des t premières fonctions symétriques élémentaires des s-uples (a_i) et (b_j): si $t \geqslant s$ alors les a_i et les b_j sont égaux, à une permutation près. Ainsi dans (11), la condition $\Sigma a_i^{k-1} \neq \Sigma b_j^{k-1}$ ne peut être satisfaite que si $s > k-2$. Désignons par $p(k)$ le plus petit des entiers $s > k$ tel qu'il existe deux s-uples différents ayant les mêmes fonctions symétriques élémentaires de degré $1, 2, \ldots, k$. La conjecture dans ce problème est que $p(k) = k+1$, résultat qui n'est connu que par des exemples numériques pour $k \leqslant 10$. Il est conjecturé que $p(k-2) = M(k)$: on a clairement l'inégalité $p(k-2) \leqslant M(k)$, mais on sait seulement montrer l'alternative: $p(k-2) = p(k-1)$ ou bien $p(k-2) = M(k)$.

En particulier $p(k-2) = M(k)$ si et seulement si la suite $p(k)$ est strictement croissante, ce qui n'est pas démontré. Tous les exemples numériques de s-uples donnant des majorations de $p(k)$, par exemple pour $k \leqslant 30$ fournissent en fait des majorations de $M(k)$ et permettent de l'utiliser pour majorer $v_*(k)$. De cela, découle par exemple les majorations $v_*(6) \leqslant 10$, $v_*(7) \leqslant 12$ et $v_*(8) \leqslant 14$. Avec $\Delta(8) \leqslant 16$, ceci donne $v(8) \leqslant 30$. Dans une courte note ([8], L. Vaserstein montre en fait que $v_*(8) \leqslant 12$ et rappelle une identité donnant $v_*(6) \leqslant 8$. Nous allons maintenant en donner l'idée, obtenant ainsi une identité plus simple que celle de [8].

Soient $4n$ entiers positifs

$$a_i, b_i, a'_j, b'_j, 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

et

$$S(x) = \sum_i (a_i x + b_i)^{2k} - (a_i x - b_i)^{2k} + \sum_j (a'_j x - b'_j)^{2k} - (a'_j x + b'_j)^{2k} :$$

c'est un polynôme impair en x dont les coefficients sont des multiples entiers des sommes

$$S_h = \sum_i a_i^{2k-(2h+1)} b_i^{2h+1} - \sum_i a_i'^{2k-(2h+1)} b_i'^{2h+1}, \; h = 0, 1, \ldots, k-1 .$$

Le polynôme S sera du premier degré, et non nul, si $S_0 = S_1 = \ldots = S_{k-2} = 0$ et $S_{k-1} \neq 0$. Pour annuler $S_0, \ldots, S_{k-2}$, il suffit d'imposer les relations: pour $i = 1, \ldots, n$

$$a_i^{2k-1} b_i = a_i'^{2k-1} b_i' \ldots$$
$$a_i^{2k-(2h+1)} b_i^{2h+1} = a_{s_h(i)}'^{2k-(2h+1)} b_{s_h(i)}'^{2h+1}, \quad h = 1, \ldots, k-2$$

où s_h est une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sans points fixes telles que $s_{h_1}(i) \neq s_{h_2}(i)$ pour tout i et $h_1 \neq h_2$ (sinon on aurait $a_i^{\alpha_k} b_i^{\beta_k} = a_j'^{\alpha_k} b_j^{\beta_k}$ pour deux couples (α_k, β_k) non proportionnels, d'où $\dfrac{a_i}{a_j'} = \left(\dfrac{b_j'}{b_i}\right)^{r_k}$ pour deux rationnels r_1 et r_2 différents ce qui donne $a_i = a_j'$ et $b_i = b_j'$). On peut prendre par exemple pour s_h la puissance $h^{\text{ième}}$ de la permutation circulaire $i \mapsto i + 1$ modulo n. Il y a $4n$ paramètres et $n(k-1)$ relations de sorte que $2 \leqslant k \leqslant 4$ et nous obtenons ainsi des identités de degré 4, 6 ou 8.

En degré 4, $(ax+b)^4 - (ax-b)^4 + (cx-d)^4 - (cx+d)^4 = Ax$ avec $A = 8(ab^3 - cd^3)$ si $a^3b = c^3d$. Là, une analyse directe permet de supposer $(a, c) = 1$. Alors $b = rc^3$ et $d = ra^3$ d'après le lemme d'Euclide; choisissant $a = 1$, $c = 2$ et $r = 1$, on obtient (5) et aucun choix de a, c et r ne permet d'obtenir de meilleure identité.

En degré 6, il y a 8 paramètres liés par les 4 relations: $a_i^5 b_i = a_i'^5 b_i'$ et $a_i^3 b_i^3 = a_{i+1}'^3 b_{i+1}'^3$, $i = 1, 2$.

En passant au logarithme on obtient le système linéaire homogène

$$i = 1, 2, \begin{cases} 5a_i + b_i - 5a_i' - b_i' = 0 \\ a_i + b_i - a_{i+1}' - b_{i+1}' = 0 \end{cases},$$

où les 8 inconnues sont encore notées a_i, a_i', b_i, b_i'.

L'espace des solutions, de dimension 4, est formé des vecteurs

$$(a_1, b_1, a_2, b_2, a_1', b_1', a_2', b_2')$$
$$= (u+v, 5w+h, u+w+h, v, u+v+w, h, u+h, v+5w),$$

u, v, w et h étant des scalaires. En repassant à l'exponentielle et en remplaçant ux par x, on obtient

$$\begin{aligned} &(vx + w^5h)^6 + (whx + v)^6 - (vx - w^5h)^6 - (whx - v)^6 \\ (12) \qquad &+ (vwx - h)^6 + (hx - vw^5)^6 - (vwx + h)^6 - (hx + vw^5)^6 \\ &= 12vwh(h^4 - v^4)(w^{24} - 1)x, \end{aligned}$$

identité de Rao qu'on peut rendre homogène.

En degré 8, il y a 12 variables et 9 relations:

$$a_i^7 b_i = a_i'^7 b_i'; a_i^5 b_i^3 = a_{i+1}'^5 b_{i+1}'^3 \quad \text{et} \quad a_i^3 b_i^5 = a_{i+2}'^3 b_{i+2}'^5 ,$$

$i = 1, 2, 3$. En linéarisant, on obtient un système homogène de 9 équations linéaires à 12 inconnues encore notées (a_i, a_i', b_i, b_i'); l'espace vectoriel des solutions, de dimension au moins 3, contient le plan engendré par les vecteurs $(a_i = a_j' = 1; b_i = b_i' = 0)$ et $(a_i = a_j' = 0; b_i = b_i' = 1)$. Il suffit de trouver les solutions du système vérifiant $a_1 = b_1' = 0$; la première équation devient $b_1 - 7a_1' = 0$ et on prend a_1' comme paramètre d'où un système de huit équations à huit inconnues $a_i, a_i', b_i, b_i', i \geqslant 2$. Le rang du système est 7 et sa résolution donne deux autres solutions indépendantes du système initial

$$(5, 6, 0, 6, 5, 0; 7, 0, 10, 0, 7, 10)$$

et

$$(0, 5, 6, 0, 6, 5; 10, 7, 0, 10, 0, 7) ,$$

ce qui donne, en rendant homogène

$$\begin{aligned}
&(a^5c^{12}x + a^7b^{10})^8 + (a^6b^5c^6x + b^7c^{10})^8 + (b^6c^{11}x + a^{10}c^7)^8 \\
&- (a^5c^{12}x - a^7b^{10})^8 - (a^6b^5c^6x - b^7c^{10})^8 - (b^6c^{11}x - a^{10}c^7)^8 \\
(13) \quad &+ (a^6c^{11}x - b^{10}c^7)^8 + (a^5b^6c^6x - a^7c^{10})^8 + (b^5c^{12}x - a^{10}b^7)^8 \\
&- (a^6c^{11}x + b^{10}c^7)^8 - (a^5b^6c^6x + a^7c^{10})^8 - (b^5c^{12}x + a^{10}b^7)^8 \\
&= 16a^6b^6c^{12}(c^{16} - a^{16})(c^{16} - b^{16})(b^{16} - a^{16})Rx
\end{aligned}$$

où R est la somme de six monômes: $\Sigma a^{32}b^{32} + \Sigma a^{32}b^{16}c^{16}$.

Cette identité est de degré total 136 en a, b, c alors que l'identité analogue de [8] est de degré 1128; cela permet donc de dire que $\upsilon_*(8) \leqslant 12$ et $\upsilon(8) \leqslant 28$ comme le dit le titre de [8].

En degré 10 et plus, nous n'avons pas de tel schéma de simplification; cependant la construction précédente donne des identités en degré 5, 7 et 9 mais de longueur trop grande en degré 7 et 9 et qui en degré 5 donne par exemple l'identité (4). Nous partons en degré 5 de

$$\begin{aligned}
P_{a,b,c}(x) &= (ax + b)^5 - (ax + b)^5 + (ax - c)^5 - (ax + c)^5 \\
&= C_5^3 a^3(b^2 - c^2)x^3 + C_5^1 a(b^4 - c^4)x \quad \text{et} \quad P_{a,b,c}(x) - \mathrm{P}_{a',b',c'}(x)
\end{aligned}$$

est un polynôme du premier degré si et seulement si

$$a^3(b^2 - c^2) = a'^3(b'^2 - c'^2 2) .$$

On peut faire plusieurs choix des six paramètres: $a' = 2, a = c = b' = 1$, $b = 3$ et $c' = 0$ donne l'identité (4). On peut aussi prendre

$$a = k\alpha\beta,\ a' = k\alpha'\beta',\ b = \frac{1}{2}(\alpha'^3 + \beta'^3),\ c = \frac{1}{2}(\alpha'^3 - \beta'^3)\ ,$$

$$b' = \frac{1}{2}(\alpha^3 + \beta^3),\ c' = \frac{1}{2}(\alpha^3 - \beta^3)\ ,$$

ce qui donne une identité plus complexe. On peut aussi choisir $c = c' = 0$ et linéariser la relation $a^3b^2 = a'^3b'^2$, d'où l'identité

$$\begin{aligned}(x + vw^3)^5 + (x - vw^3)^5 - (w^2x + v)^5 - (w + 2x - v)^5 + 2(w^2x)^5 \\ - 2x^5 = 10v^4w^2(w^{10} - 1)x\ ,\end{aligned} \tag{14}$$

identité de longueur 8 (on remarquera que le coefficient A de x du second membre est toujours un multiple de 11 car $w^{12} - w^2 \equiv 0(11)$ et que $\Delta(5;11) = 5 > \Delta(5;720)$ ou $\Delta(5;780)$.

En degré 7, on considère une somme

$$\sum_{i=1}^{2} P_{a_i, b_i, c_i} - P_{a'_i, b'_i, c'_i}$$

on pose alors $c_i = c'_j = 0$ et on a les quatre relations

$$a_i^5 b_i^2 = a_i'^5 b_i'^2 \quad \text{et} \quad a_i^3 b_i^4 = a_{i+1}'^3 b_{i+1}'^4$$

ce qui donne finalement l'identité

$$\begin{aligned}(b^4c^4x \pm ab^5c^3)^7 + (b^2c^4x \pm ab^3c^{10})^7 - (b^6x \pm ac^{13})^7 - (c^8x \pm ab^8)^7 \\ + 2x^7(b^{42} + c^{56} - b^{28}c^{28} - b^{14}c^{28}) = 14ab^8c^{13}(b^{21} - c^{21})(c^{14} - b^7)x\end{aligned} \tag{15}$$

dont le premier membre contient 16 puissances septièmes, ce qui est supérieur à $v_*(7) \leqslant 2M(7) = 12$.

De même en degré 9, on partira de

$$\sum_{i=1}^{3} P_{a_i, b_i, 0} - P_{a'_i, b'_i, 0}$$

et on obtient par la même méthode (système linéaire de 9 équations à 12 inconnues) une identité dont le premier membre est la somme de 24 puissances 9èmes. Les coefficients a_i, a'_j, b_i, a'_j sont donnés dans le tableau suivant:

	a	a'	b	b'
1	v^8	v^6	uw^{10}	uv^7w^{10}
2	w^6	w^8	$uv^{10}w^7$	uv^{10}
3	v^6w^8	v^8w^6	uv^7	uw^7

Le coefficient de x de second membre est $A = 18u^8v^8w^8(w^{18} - v^{18})Q(v, w)$ où Q est le polynôme

$$Q(x, y) = x^{54} + y^{54} - x^{54}y^{54} + x^{36} + y^{36} + x^{18}y^{18} + x^{36}y^{18} + x^{18}y^{36} .$$

La longueur de l'identité est 24 ce qui la rend pratiquement inutile.

5. Retour sur le problème de Tarry-Escott

En degré k suffisamment petit, beaucoup d'identités et donc de majoration de $v_*(k)$ proviennent de s-uples $(a_1, \ldots, a_s)$ et $(b_1, \ldots, b_s)$ dont les $k - 2$ premières fonctions symétriques élémentaires coïncident. On écrira alors suivant une notation classique dans cette question $[a_1, \ldots, a_s]_{k-2} = [b_1, b_2, \ldots, b_s]_{k-2}$. La recherche systématique de tels s-uples se fait en général inductivement, à l'aide des deux opérations suivantes ([4], [6]).

Lemme. *Si* $[a_1, \ldots, a_r]_k = [b_1, \ldots, b_r]_k$, *alors quel que soit* x

1) $$[a_1, \ldots, a_r, b_1 + x, b_2 + x, \ldots, b_{r+x}]_{k+1} = [a_1 + x, a_2 + x, \ldots, a_r + x, b_1, b_2, \ldots, b_r]_{k+1} .$$

2) $$[a_1, \ldots, a_r, a_1 + x, \ldots, a_r + x]_k = [b_1, \ldots, b_r, b_1 + x, \ldots, b_r + x]_k .$$

Naturellement la longueur des s-uples déduit par le procédé récurrent est le double des s-uples de départ mais un choix judicieux peut permettre de réduire cette longueur: en effet chaque fois que l'on a $a_i + x = a_j$ (resp. $b_u + x = b_v$) on pourra supprimer dans l'égalité des deux crochets, les termes égaux, aussi pour appliquer la règle en question on calcule $\{a_i - a_j / i > j\}$ et $\{b_i - b_j / i > j\}$ et on choisit pour x l'un des entiers qui est le plus souvent une différence de deux a_i et de deux b_i. Ainsi partant de $[0, 3]_1 = [1, 2]_1$ en ajoutant 3 puis 5 puis 7, on trouve $[0, 4, 5]_2 = [1, 2, 6]_2$, $[0, 4, 7, 11]_3 = [1, 2, 9, 10]_3$ et $[0, 4, 8, 16, 17]_4 = [1, 2, 10, 14, 18]_4$ ce qui montre que $p(k) = k + 1$ pour $k \leqslant 4$ et que $v_*(k) = 2(k - 1)$ pour $k \leqslant 6$. On peut développer cette technique et s'essayer à trouver de nombreux exemples de s-uples vérifiant $[a_1, \ldots, a_s]_h = [b_1, \ldots, b_s]_h$ mais il n'est pas évident de minimaliser s par rapport à h.

On peut aussi opérer littéralement en partant de $[a, b]_1 = [c, a + b - c]_1$ en prenant x dans le $\mathbf{Z}$-module libre de base (a, b, c). On prend $x = b - a$ d'où $[a, b + c - a, 2b - c]_2 = [c, a + b - c, 2b - a]_2$; ensuite on peut prendre $y = a - 2b + c$ d'où

$$[b+c-a, 2b-c, a-2b+2c, 2a-b]_3$$
$$= [2b-a, a+b-c, 2a-2b+c, -b+2c]_3$$

ce qui fournit une famille d'identités

$$\sum_{i=1}^{4} (x+a_i)^5 - (x+b_i)^5 = Ax + B$$

où A est un polynôme homogène de degré 4. L'identité (3) en est un cas particulier provenant de $[0,3,4,7]_3 = [1,1,6,6]_3$ qu'on peut obtenir à partir de $[0,4,5]_2 = [1,2,6]_2$ en ajoutant 1 (au lieu de 7). L'existence de plusieurs choix possibles pour x rajoute à la difficulté d'une étude systématique qui pour l'instant n'a fourni ainsi que des exemples. On trouvera dans [9] des références bibliographiques ainsi que des majorations explicites pour $p(k)$ et $M(k)$ définis dans la partie précédente.

RÉFÉRENCES

[1] ELLISON, W. J. Waring's problem. *Amer. math. monthly 78* (1971), 10-36.
[2] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An introduction to the Theory of Numbers.* 4e édition, Clarendon Press, Oxford (1960).
[3] HUNTER, W. The representation of numbers by sums of fourth powers. *J. Lon. Math. Soc. 16* (1941), 143-145.
[4] MEHROTRA, S. N. On sums of powers. *Mathematics Student 35* (1967), 73-77, *37* (1969), 204-205.
[5] MORDELL, L. J. *Diophantine equations.* Academic Press, London and New York (1968).
[6] RAI, T. Easier Waring problem. *J. Sci. Res. Benares Hindu Univ. 1* (1951), 5-19.
[7] REVOY, Ph. Sur les sommes de quatre cubes. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 209-220.
[8] VASERSTEIN, L. N. Every integer is a sum or difference of 28 integral eighth powers. *J. of Numb. Th. 28* (1988), 66-68.
[9] WRIGHT, E. M. Equal sums of like powers. *Cand. Math. Bull. 8* (1965), 193-202.

(Reçu le 27 décembre 1990)

Philippe Revoy

Département des Sciences Mathématiques
Université Montpellier II
Plage Eugène-Bataillon
F-34095 Montpellier Cedex 5 (France)