

3. NON-REALIZABLE ISOMETRIES

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Let X be any simply connected algebraic surface with a big monodromy group. If $p_g(X) \equiv 0 \pmod{2}$ then the degree of $\Phi_l(X)$ is odd. If $p_g(X) \equiv 1 \pmod{2}$ and $k_X^2 \equiv 1 \pmod{2}$ then the degree of $\Phi_{k_X, \alpha, P}(X)$ is odd. So k_X divides $\Phi_l(X)$ or $\Phi_{k_X, \alpha, P}(X)$ in these cases.

Remark. Theorem 4 and its corollary remain true for polynomials $\Phi_{c, \alpha, P}(X)$ if $c \in H^2(X, \mathbf{Z})$ is a class with $\bar{c} \neq 0$ such that $\overline{f^*(c)} = \bar{c}$ for all $f \in \psi(\text{Diff}_+(X))$. The question which elements of $H^2(X, \mathbf{Z})$ or $H^2(X, \mathbf{Z}/2)$ have this invariance property will be treated in §4.

3. NON-REALIZABLE ISOMETRIES

We shall show that for a simply connected algebraic surface with odd geometric genus, -1 is not induced by an orientation preserving diffeomorphism. For K3 surfaces this was shown by Donaldson in the proof of [D, Proposition 6.2]. There he proves the nontriviality of a certain polynomial $\Phi_{c, \alpha, P}(X)$ for a K3 surface X . With Zuo's nontriviality result (Theorem 3) we are able to generalize this as follows.

THEOREM 6. *If X is a simply connected algebraic surface with $p_g(X) \equiv 1 \pmod{2}$ then $-1 \notin \psi(\text{Diff}_+(X))$.*

Proof. Suppose that there is an orientation preserving diffeomorphism $f: X \rightarrow X$ such that $f^* = -1$. Let $c \in H^{1,1}(X, \mathbf{Z})$ be a class with $\bar{c} \neq 0$, and choose a principal $SO(3)$ -bundle P with $w_2(P) = \bar{c}$ such that $\Phi_{c, \alpha, P}(X)$ is nontrivial. This is possible according to Theorem 3. Then

$$f^* \Phi_{c, \alpha, P}(X) = (-1)^d \Phi_{c, \alpha, P}(X),$$

since $\Phi_{c, \alpha, P}(X)$ is a polynomial of degree d on L .

On the other hand, by §2(c)

$$f^* \Phi_{c, \alpha, P}(X) = \Phi_{f^*c, f^*\alpha, f^*P}(X).$$

We have $f^*c = -c$ and $f^*\alpha = -\alpha$ because $f^* = -1$ and the dimension of α is odd. Since f is orientation preserving and $f^* = -1$ we find $f^*p_1(P) = p_1(P)$ and $f^*w_2(P) = w_2(P)$, so that the bundle f^*P is isomorphic to P . Therefore

$$f^* \Phi_{c, \alpha, P}(X) = \Phi_{-c, -\alpha, P}(X) .$$

Applying §2 (a) and (b) with $a = -c$ we get

$$f^* \Phi_{c, \alpha, P}(X) = -\Phi_{-c, \alpha, P}(X) = -(-1)^{c^2} \Phi_{c, \alpha, P}(X) .$$

By assumption $\Phi_{c, \alpha, P}(X) \neq 0$, so we must have

$$(-1)^{c^2+1} = (-1)^d .$$

Now $d = 4c_2 - c^2 - 3(1 + p_g(X))$ implies that $(-1)^{p_g(X)} = 1$, i.e. $p_g(X) \equiv 0 \pmod{2}$. This proves Theorem 6.

4. DIFFEOMORPHISM GROUPS OF SOME ALGEBRAIC SURFACES

In §1 we saw that the image of ψ contains the group $O'_k(L) \cdot \{\sigma_*, \text{id}\}$ in many cases. In §2 we showed that under certain conditions $\{\pm k_X\}$ is invariant under $\psi(\text{Diff}_+(X))$. Finally we proved in the previous section that for algebraic surfaces of odd geometric genus -1 is not induced by an orientation preserving diffeomorphism. It turns out that these facts suffice to determine the image of ψ .

PROPOSITION 7. *Let X be a simply connected algebraic surface which satisfies the following conditions:*

- (i) $O'_k(L) \cdot \{\sigma_*, \text{id}\} \subset \psi(\text{Diff}_+(X))$,
- (ii) $\{\pm k_X\}$ is invariant under $\psi(\text{Diff}_+(X))$,
- (iii) $-1 \notin \psi(\text{Diff}_+(X))$.

Then

$$\psi(\text{Diff}_+(X)) = O'_k(L) \cdot \{\sigma_*, \text{id}\} .$$

Proof. Let $g = -\sigma_*$. Then $g \in O_k(L)$, but $g \notin \psi(\text{Diff}_+(X))$, since $-1 \notin \psi(\text{Diff}_+(X))$. Hence by (i), $g \notin O'_k(L)$. Therefore

$$O_k(L) = O'_k(L) \cdot \{g, \text{id}\} .$$

Now let $h \in \psi(\text{Diff}_+(X))$. By (ii) either $h(k) = k$ or $h(k) = -k$. In the first case $h \in O_k(L)$. Moreover, $h \in O'_k(L)$ since otherwise $h = gh_0$ for some $h_0 \in O'_k(L)$ which would imply $g \in \psi(\text{Diff}_+(X))$, a contradiction. In the second case we have $h' = h\sigma_* \in O_k(L)$. By the same argument as before we see that $h' \in O'_k(L)$. Hence $h = h'\sigma_* \in O'_k(L) \cdot \{\sigma_*, \text{id}\}$. This proves Proposition 7.

Putting everything together we get the main result of our paper.