

§3. Idéaux symétriques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

entre eux deux à deux, tels que

$$\Delta = dd_0d_1d', \quad D_0 = dd_0, \quad D_1 = dd_1,$$

et un nombre rationnel r dépendant de I_0 et I_1 tel que l'idéal J défini ci-dessous soit un idéal ambige primitif réduit.

| Types de I_0 et I_1 (Corollaire 2) | $J = rI_0I_1$ | $J = r\sqrt{\bar{D}}I_0I_1$ |
|---|-----------------------------------|-----------------------------------|
| du même type | $d_0d_1 < \sqrt{\bar{D}}$ | $d_0d_1 > \sqrt{\bar{D}}$ |
| 1 et 2, 3 et 4 | $2^t d_0d_1 < \sqrt{\bar{D}}$ | $2^t d_0d_1 > \sqrt{\bar{D}}$ |
| 2 et 3, 1 et 4 | $2^{t-1} d_0d_1 < \sqrt{\bar{D}}$ | $2^{t-1} d_0d_1 > \sqrt{\bar{D}}$ |
| 1 et 3, 2 et 4 | $2d_0d_1 < \sqrt{\bar{D}}$ | $2d_0d_1 > \sqrt{\bar{D}}$ |

L'idéal J est égal à (1) si, et seulement si, $I_0 = I_1$.

Démonstration. La Proposition 2' se démontre comme la Proposition 2. On calcule les produits d'idéaux primitifs ambiges réduits des dix différentes combinaisons de types en fonction des nombres d_0 et d_1 . Si le produit obtenu n'est pas réduit, on le multiplie par l'idéal «complémentaire» pour obtenir un idéal réduit.

§3. IDÉAUX SYMÉTRIQUES

Définition 3. Soit $I = \left[a, \frac{b + \sqrt{D}}{2} \right]$ un idéal et $c = \frac{D - b^2}{4a}$. L'idéal I est *symétrique* si l'on peut choisir $b > 0$ dans sa classe modulo $2a$ de façon que $a = c$.

Définition 4. a) Une *représentation* de \bar{D} comme somme de deux carrés est un couple (M, N) d'entiers > 0 tels que $(M, N) = 1, M^2 + N^2 = \bar{D}$ et $M \equiv 1 \pmod{2}$.

b) Soit $\bar{D} = M^2 + N^2$ une représentation de \bar{D} . L'idéal symétrique primitif

$$S = \begin{cases} \left[\frac{N}{2}, \frac{M + \sqrt{D}}{2} \right], & \text{si } D \equiv 1 \pmod{4}, \\ [M, N + \sqrt{\bar{D}}], & \text{si } D \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

est dit *associé* à la représentation (M, N) de \bar{D} .

PROPOSITION 3. i) *Tout idéal symétrique est réduit.*

ii) *Les idéaux symétriques primitifs sont les idéaux associés aux représentations de \bar{D} .*

Démonstration. i) On voit facilement que les relations $D = b^2 + 4a^2$, $a > 0$, $b > 0$ impliquent (1.2).

ii) Soit $I = \left[a, \frac{b + \sqrt{D}}{2} \right]$ un idéal symétrique. On a donc $D = b^2 + 4a^2$, $b > 0$, et I est primitif si, et seulement si, $(a, b) = 1$.

Si $D \equiv 1 \pmod{4}$, b est impair donc $I = \left[\frac{N}{2}, \frac{M + \sqrt{D}}{2} \right]$ où $N = 2a$, $M = b$ et $(N, M) = (2a, b) = 1$. Inversement, si $D = M^2 + N^2$, $(M, N) = 1$ et $M \equiv 1 \pmod{2}$, alors $\left[\frac{N}{2}, \frac{M + \sqrt{D}}{2} \right]$ est un idéal symétrique et primitif.

Si $D \equiv 0 \pmod{4}$, b est pair, donc a impair et $\frac{D}{4} = M^2 + N^2$ avec $M = a \equiv 1 \pmod{2}$, $N = \frac{b}{2}$, et $I = [M, N + \sqrt{\bar{D}}]$ avec $(M, N) = \left(a, \frac{b}{2} \right) = 1$.

Inversement si $\frac{D}{4} = M^2 + N^2$ avec $(M, N) = 1$, $M \equiv 1 \pmod{2}$ alors $[M, N + \sqrt{\bar{D}}]$ est un idéal symétrique, et primitif car $(2N, M) = (N, M) = 1$.

Nous allons étudier les représentations de \bar{D} dans les Lemmes 4 et 5 puis en déduire une propriété importante des idéaux symétriques associés.

LEMME 4. a) *Les discriminants D tels que l'anneau O_D contienne des idéaux symétriques primitifs sont les nombres D tels que*

$$(3.1) \quad \bar{D} = 2^s p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}, \quad s = 0 \text{ ou } 1, \quad p_i \text{ premier } \equiv 1 \pmod{4}.$$

b) *Soit l le nombre des diviseurs premiers distincts de \bar{D} . Le nombre des représentations de \bar{D} comme somme de deux carrés est 2^{l-1} .*

c) *Le nombre des idéaux primitifs symétriques est 2^{l-1} .*

d) Le nombre des idéaux ambiges primitifs réduits est 2^{l-1} , et la norme de tout tel idéal divise \bar{D} .

Démonstration. D'après la Proposition 3 les nombres D sont les nombres tels que \bar{D} est somme de deux carrés premiers entre eux, ce qui prouve (3.1). D'après [9], Satz 52, le nombre des décompositions de \bar{D} en somme de deux carrés premiers entre eux est 2^{k-1} ; chaque décomposition donne une représentation si $s = 0$ et deux représentations si $s = 1$, ce qui prouve b), et c) résulte de la Proposition 3, ii).

Comme $D \equiv 1 \pmod{4}$ ou $D \equiv 4 \pmod{16}$ ou $D \equiv 8 \pmod{32}$, le tableau de la Proposition 1 montre d).

LEMME 5. Soit D un discriminant tel que \bar{D} soit représentable comme somme de deux carrés. Soit, d'une part, $\bar{D} = M^2 + N^2$ une représentation de D et, d'autre part, une décomposition $\bar{D} = D_1 D_2$ en deux facteurs $D_1 > 0$ et $D_2 > 0$ premiers entre eux. Alors il existe un couple unique de représentations $D_1 = a_1^2 + b_1^2$, $D_2 = a_2^2 + b_2^2$ et un signe $\theta = \pm 1$ tels que

$$M = |a_1 a_2 - \theta b_1 b_2|, \quad N = |a_1 b_2 + \theta a_2 b_1|.$$

Démonstration. Nous supposons D_1 impair. Soient l_1 et l_2 le nombre des diviseurs premiers de D_1 et D_2 respectivement. D'après le Lemme 4 le nombre des représentations de D_1 est 2^{l_1-1} celui de D_2 est 2^{l_2-1} . Prenant un couple de représentations $D_1 = a_1^2 + b_1^2$, $D_2 = a_2^2 + b_2^2$ et un signe $\theta = \pm 1$ nous obtenons

$$(3.2) \quad \bar{D} = |a_1 a_2 - \theta b_1 b_2|^2 + |a_2 b_1 + \theta a_1 b_2|^2$$

de $2^{l_1-1+l_2-1+1} = 2^{l-1}$ manières différentes.

Pour démontrer le Lemme 5 il suffit de montrer que nous obtenons ainsi les 2^{l-1} représentations de \bar{D} , c'est-à-dire que nous avons bien des représentations de \bar{D} au sens de la Définition 4 et qu'elles sont distinctes.

Comme $a_1 \equiv a_2 \equiv 1 \pmod{2}$ et que $b_1 \equiv 0 \pmod{2}$ on voit que $a_1 a_2 - \theta b_1 b_2$ est impair.

D'autre part, dans l'anneau $Z[i]$, on a

$$(3.3) \quad (a_1 + i b_1)(a_2 + i \theta b_2) = (a_1 a_2 - \theta b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + \theta a_1 b_2).$$

Comme ni $a_1 + i b_1$, ni $a_2 + i b_2$ n'a de diviseur rationnel et que $(a_1^2 + b_1^2, a_2^2 + b_2^2) = 1$ on voit que $(a_1 a_2 - \theta b_1 b_2, a_2 b_1 + \theta a_1 b_2) = 1$, et donc que $M = |a_1 a_2 - \theta b_1 b_2|$, $N = |a_2 b_1 + \theta a_1 b_2|$ est une représentation de \bar{D} . Il

reste à démontrer que les 2^{l-1} représentations ainsi obtenues sont distinctes. Supposons donc que l'on ait

$$|a_1 a_2 - \theta b_1 b_2| = |a'_1 a'_2 - \theta' b'_1 b'_2|, \quad |a_2 b_1 + \theta a_1 b_2| = |a'_2 b'_1 + \theta' a'_1 b'_2|,$$

où (a'_1, b'_1) et (a'_2, b'_2) sont des représentations de D_1 et D_2 respectivement.

Ceci signifie que l'une des quatre égalités suivantes est vraie:

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + i\theta b_2) = \begin{cases} (a'_1 + ib'_1)(a'_2 + i\theta' b'_2) \\ - (a'_1 + ib'_1)(a'_2 + i\theta' b'_2) \\ (a'_1 - ib'_1)(a'_2 - i\theta' b'_2) \\ - (a'_1 - ib'_1)(a'_2 - i\theta' b'_2) \end{cases}$$

Les troisième et quatrième égalités ne peuvent pas être vérifiées car les deux membres n'ont pas les mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbf{Z}[i]$. On voit donc que $a_1 + ib_1$ et $a'_1 + ib'_1$ sont associés et, tenant compte des parités et des signes de a_1, b_1, a'_1, b'_1 , on a $a_1 + ib_1 = a'_1 + ib'_1$ d'où $a_2 + i\theta b_2 = \pm (a'_2 + i\theta' b'_2)$ ce qui, tenant compte des signes de a_2, b_2, a'_2, b'_2 , montre que $\theta = \theta'$ et $a_2 + i\theta b_2 = a'_2 + i\theta b'_2$, et achève la démonstration du Lemme 5.

Grâce à ce Lemme 5 nous pouvons obtenir le résultat le plus profond de ce travail:

PROPOSITION 4. *Soit D un discriminant tel que l'anneau O_D contienne des idéaux primitifs symétriques. Soit $\bar{D} = M^2 + N^2$ une représentation de \bar{D} et $\bar{D} = D_1 D_2$ une décomposition de \bar{D} en deux facteurs premiers entre eux.*

Soient $D_1 = a^2 + b^2, D_2 = c^2 + d^2$ et $\theta = \pm 1$ les représentations de D_1 et D_2 et le nombre θ bien déterminés par le Lemme 5 tels que $M = |ac - \theta bd|, N = |ad + \theta bc|$. Alors $m = |ac + \theta bd|, n = |ad - \theta bc|$ est une représentation de \bar{D} , et posant

$$(3.4) \quad \begin{cases} I = \left[D_1, \frac{D_1 + \sqrt{D}}{2} \right], \quad S = \left[\frac{N}{2}, \frac{M + \sqrt{D}}{2} \right], \quad S' = \left[\frac{n}{2}, \frac{m + \sqrt{D}}{2} \right], \\ \text{si } D \equiv 1 \pmod{4}, \\ I = [D_1, \sqrt{\bar{D}}], \quad S = [M, N + \sqrt{\bar{D}}], \quad S' = [m, n + \sqrt{\bar{D}}], \\ \text{si } D \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

on a

$$(3.5) \quad SS' = \left(\frac{\gamma}{D_1} \right) I$$

où γ est un nombre de O_D qui vérifie

$$(3.6) \quad \text{sgn } N(\gamma) = \text{sgn}(abD_2 - cdD_1),$$

$$(3.7) \quad \begin{cases} \left(\frac{M + \sqrt{D}}{2} \right) \left(\frac{m + \sqrt{D}}{2} \right) = \frac{\gamma^2}{D_1}, & \text{si } D \equiv 1 \pmod{4}, \\ (N + \sqrt{D})(n + \sqrt{D}) = \frac{\gamma^2}{D_1}, & \text{si } D \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Démonstration. Supposons $D \equiv 1 \pmod{4}$. Alors on voit que

$$(3.8) \quad 4SS' = \begin{cases} [ad + bc, ac - bd + \sqrt{D}] [ad - bc, ac + bd + \sqrt{D}], & \text{si } ac > bd, \\ [ad + bc, bd - ac + \sqrt{D}] [ad - bc, ac + bd + \sqrt{D}], & \text{si } ac < bd. \end{cases}$$

Considérant d'abord le cas où $ac > bd$ on trouve

$$(3.9) \quad 4SS' = \langle a^2d^2 - b^2c^2, (ad + bc)(ac + bd + \sqrt{D}), \\ (ad - bc)(ac - bd + \sqrt{D}), a^2c^2 - b^2d^2 + D + 2ac\sqrt{D} \rangle.$$

Posons

$$(3.10) \quad \gamma' = \frac{D_1c + a\sqrt{D}}{2}, \quad \gamma'' = \frac{D_1d + b\sqrt{D}}{2}, \quad \gamma', \gamma'' \in O_D.$$

On vérifie par un calcul aisé que

$$(3.11) \quad b^2c^2 - a^2d^2 = \frac{4N(\gamma')}{D_1}, \quad a^2d^2 - b^2c^2 = \frac{4N(\gamma'')}{D_1},$$

$$(3.12) \quad a^2c^2 - b^2d^2 + D + 2ac\sqrt{D} = \frac{4\gamma'^2}{D_1},$$

$$b^2d^2 - a^2c^2 + D + 2bd\sqrt{D} = \frac{4\gamma''^2}{D_1},$$

$$(3.13) \quad (ad + bc)(ac + bd + \sqrt{D}) = \frac{4\gamma'\gamma''}{D_1},$$

$$(ad - bc)(ac - bd + \sqrt{D}) = \frac{4\gamma'\bar{\gamma}''}{D_1},$$

si bien que l'on a

$$(3.14) \quad SS' = \left(\frac{\gamma'}{D_1} \right) \langle \gamma', \bar{\gamma}', \gamma'', \bar{\gamma}'' \rangle .$$

Si $ac < bd$ il suffit de changer le rôle des paires (a, c) et (b, d) et l'on trouve

$$(3.15) \quad SS' = \left(\frac{\gamma''}{D_1} \right) \langle \gamma', \bar{\gamma}', \gamma'', \bar{\gamma}'' \rangle .$$

Considérons maintenant l'idéal entier ambige sans diviseur rationnel $J = \langle \gamma', \gamma'', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}'' \rangle$.

La définition (3.10) de γ' et γ'' montre que tout nombre de J s'écrit $\frac{x D_1 + y \sqrt{D}}{2}$ où $x, y \in \mathbf{Z}$ avec $x \equiv y \pmod{2}$, donc tout entier rationnel de J est multiple de D_1 . D'autre part $\gamma' + \bar{\gamma}' = c D_1$ et $\gamma'' + \bar{\gamma}'' = d D_1$ appartiennent à J et aussi D_1 , donc $N(J) = D_1$. Mais, d'après le Lemme 1, I est le seul idéal ambige sans diviseur rationnel de norme D_1 , donc $J = I$.

On obtient (3.5) en posant $\gamma = \gamma'$ si $ac > bd$, $\gamma = \gamma''$ si $ac < bd$. Mais, d'après (3.11), on voit que

$$\operatorname{sgn} N(\gamma) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(bc - ad) , & \text{si } ac - bd > 0 , \\ \operatorname{sgn}(ad - bc) , & \text{si } ac - bd < 0 , \end{cases}$$

ce qui signifie que

$$\operatorname{sgn} N(\gamma) = \operatorname{sgn} [(ac - bd)(bc - ad)] = \operatorname{sgn}(ab D_2 - cd D_1)$$

ce qui est (3.6), et (3.7) se voit en comparant (3.8) et (3.12), ce qui achève la démonstration quand $D \equiv 1 \pmod{4}$.

Considérons maintenant le cas où $D \equiv 0 \pmod{4}$. La démonstration de (3.14) et (3.15) est semblable, il suffit de supprimer le facteur 4 dans (3.8), de permuter c et d , de supprimer les facteurs 2 des dénominateurs de (3.10), et de remplacer D par \bar{D} si bien que (3.14) et (3.15) sont vraies avec

$$(3.16) \quad \gamma' = D_1 d + a \sqrt{\bar{D}} , \quad \gamma'' = D_1 c + b \sqrt{\bar{D}} .$$

Ici aussi il faut montrer que $J = \langle \gamma', \gamma'', \bar{\gamma}', \bar{\gamma}'' \rangle$ est égal à I . On voit, comme plus haut, que tout entier rationnel de J est multiple de D_1 , et aussi que $2c D_1, 2d D_1$ et $(bd - ac) D_1$ sont dans J , ce qui, comme $(c, d) = 1, a \equiv c \equiv 1 \pmod{2}$ et $bd \equiv 0 \pmod{2}$ prouve que $N(J) = D_1$, et, d'après la Proposition 1, prouve que $J = I$. La démonstration de (3.6) et (3.7) est la même que celle pour le cas $D \equiv 1 \pmod{4}$ ce qui achève la démonstration de la Proposition 4.