

6. Retour de l'éclaté à l'espace initial

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

forme est donc donné par l'image de $H_k(M) \otimes \hat{H}_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$. Mais les éléments de ce supplémentaire sont eux-mêmes de la forme $z' \times \hat{\lambda}$ où $z' \in H_k(M)$ et où $\hat{\lambda}$ est la classe d'homologie du 0-simplexe singulier de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ d'image λ , classe sur laquelle $H_0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ est libre. Si donc $\tilde{\lambda}$ est la classe d'homologie dans $H_0(\mathbf{P}_*^1)$ du même 0-simplexe, on a, par naturalité du produit-croix,

$$z' \times \hat{\lambda} = i'_k(z' \times \tilde{\lambda})$$

et η'_k s'annule donc dessus d'après l'exactitude de la ligne inférieure du diagramme (5.20.1). Cela montre la dernière assertion du corollaire 5.20. \square

Dans la suite, nous ne nous servons de ce qui a été fait dans ce paragraphe qu'à travers le corollaire 5.20 (excepté que, de manière indépendante de tout le reste, nous renverrons aux lemmes élémentaires 5.15 et 5.18 pour la démonstration du lemme élémentaire 7.7). On retrouve bien, dans ce corollaire, le deuxième point clef de la démonstration du théorème 1.3 dont nous avons parlé au moment de la présentation informelle de l'isomorphisme de Leray. En effet, d'après les démonstrations de la proposition 5.14 et du corollaire 5.20, la naturalité de l'isomorphisme de Leray par rapport à une sous-variété fermée transverse s'exprime dans la commutativité du diagramme (5.20.1) et la réduction à un produit-croix de l'isomorphisme de Leray dans le cas trivial est manifestée par les formules explicites (5.20.2) et (5.20.3).

6. RETOUR DE L'ÉCLATÉ À L'ESPACE INITIAL

Dans ce paragraphe, nous étudions d'un point de vue homologique la relation entre, d'une part, les éléments $\tilde{P}, \tilde{M}, L^\#, L_i^\#, M^\#, M_i^\#$ dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ sur lesquels a porté notre étude aux paragraphes précédents et, d'autre part, les éléments P, L, L_i, M dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ sur lesquels porte le théorème 1.3 (cf. fig. 3.2). Nous nous étions en effet placés dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$ pour rendre compte de l'«isotopie» décrite informellement dans l'introduction et l'éclatement de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le long de l'axe \mathcal{M} du pinceau \wedge avait été motivée par la nécessité de «répéter» cet axe. Toute l'étude géométrique qui précède a été faite dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$. Nous allons maintenant «redescendre» de $\tilde{\mathbf{P}}^n$ à $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ au moyen du morphisme d'éclatement f . Comme nous ne nous intéressons qu'à ce qui se passe en dehors de A dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ et de sa transformée totale \tilde{A} dans $\tilde{\mathbf{P}}^n$, nous allons en fait étudier la géométrie de

$$(6.1) \quad f: \tilde{P} \rightarrow P \quad \text{application induite par le morphisme d'éclatement } f$$

(cf. fig. 3.1 et 3.2).

Nous avons déjà vu en (3.29) que f donc f induisent les isomorphismes suivants:

$$(6.2) \quad \begin{cases} L^\# \xrightarrow{\sim} L \\ L_i^\# \xrightarrow{\sim} L_i & \text{pour } 1 \leq i \leq s \\ M^\# \xrightarrow{\sim} M \\ M_i^\# \xrightarrow{\sim} M & \text{pour } 1 \leq i \leq s. \end{cases}$$

Nous en avons en fait déjà tenu compte dans les propositions principales des §§4 et 5 en y faisant directement intervenir L, L_i et M à la place de $L^\#, L_i^\#$ et $M^\#, M_i^\#$.

Sur $\tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, l'application f coïncide avec la *première projection*

$$(6.3) \quad f': \tilde{M} = M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow M$$

puisque, nous l'avons vu au §3, le morphisme f coïncide avec la première projection sur $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. La formule de Künneth pour le produit $M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et la manière dont la projection f' agit en homologie sur les produits-croix (cf. [Sp] 5.3.12) donnent alors, pour tout k , la suite exacte courte scindée suivante

$$(6.4) \quad 0 \rightarrow H_{k-2}(M) \xrightarrow{\sigma'_k} H_k(\tilde{M}) \xrightarrow{f'_k} H_k(M) \rightarrow 0,$$

dans laquelle on a appliqué la convention d'écriture (2.1) à f' et où σ'_k est donné par

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \sigma'_k: H_{k-2}(M) &\rightarrow H_k(\tilde{M}) \\ z' &\mapsto z' \times w, \end{aligned}$$

w étant la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique, conformément à la définition (5.16); on convient que $H_{k-2}(M) = 0$ pour $k < 2$.

Il nous reste à voir comment se transforme \tilde{P} . Nous avons noté au §3 que le morphisme f induit un isomorphisme analytique de $\tilde{\mathbf{P}}^n \setminus \tilde{\mathcal{M}}$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \setminus \mathcal{M}$. L'application f réalise donc un isomorphisme de $\tilde{P} \setminus \tilde{M}$ sur $P \setminus M$. Nous venons de constater, d'autre part, qu'elle réduit \tilde{M} en M suivant la première projection f' . Nous allons voir que, globalement, elle se comporte, en homologie, comme une simple juxtaposition de ces deux phénomènes.

Définissons, en effet, pour tout k , l'homomorphisme σ_k comme composé de σ'_k suivi de l'homomorphisme $H_k(\tilde{M}) \rightarrow H_k(\tilde{P})$ induit par inclusion, ce qu'on peut représenter par la commutation du diagramme

$$(6.6) \quad \begin{array}{ccc} & & H_k(\tilde{P}) \\ & \nearrow \sigma_k & \uparrow h_k \\ H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma'_k} & H_k(\tilde{M}) \end{array}$$

où h_k est, conformément à la convention (2.1), induit par l'inclusion h nommée en (5.19). Il est plus parlant d'écrire, en posant $w = [\Omega]$ comme en (5.17),

$$(6.7) \quad \sigma_k([\eta]) = [\eta \times \Omega] \tilde{P} \quad \text{pour tout } (k-2)\text{-cycle } \eta \text{ de } M,$$

avec un produit-croix homologique défini au niveau des cycles (cf. [Gb] (29.27)). On peut dire que σ_k fait correspondre à tout élément de $H_{k-2}(M)$ son «produit-croix plongé» par la classe fondamentale w de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

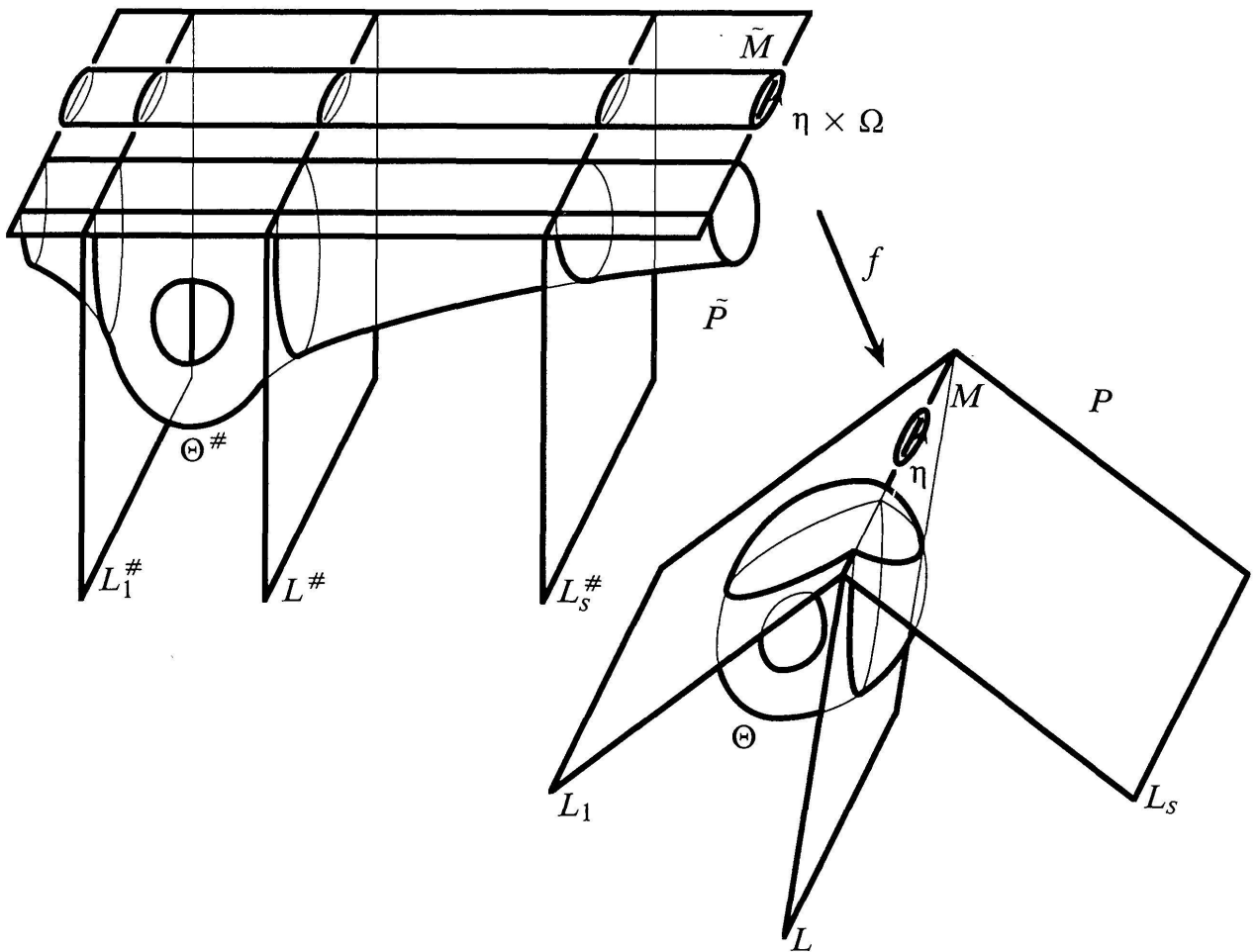


FIGURE 6.1

Le comportement dont nous avons parlé est alors décrit par la proposition suivante:

PROPOSITION 6.8. *Pour tout k , l'homomorphisme σ_k défini ci-dessus entre dans la suite exacte courte scindée suivante:*

$$0 \rightarrow H_{k-2}(M) \xrightarrow{\sigma_k} H_k(\tilde{P}) \xrightarrow{f_k} H_k(P) \rightarrow 0$$

où f_k est, suivant la convention (2.1), induit par l'application f définie en (6.1) comme restriction du morphisme d'éclatement. Nous convenons que $H_{k-2}(M) = 0$ pour $k < 2$.

Démonstration. Elle est faite dans [Ch2] proposition 4 qui d'ailleurs s'inspire de [A-F2] §4, theorem 2 et y renvoie pour partie. \square

La signification d'une partie du contenu de la proposition 6.8 peut être informellement décrite comme suit: Tout k -cycle de P est homologue à un cycle Θ qui est l'image par f d'un k -cycle $\Theta^\#$ de \tilde{P} (cf. fig. 6.1) et les seuls k -cycles de \tilde{P} qui soient «ratatinés» par f sont, à homologie près, les «transformées totales» $\eta \times \Omega$ de $(k-2)$ -cycles η de M , produits-croix de η par un 2-cycle fondamental Ω de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Nous rassemblons, pour finir, le contenu de ce paragraphe dans le corollaire suivant qui est clair à partir de la suite exacte (6.4) et de la proposition 6.8:

COROLLAIRE 6.9. *On a, pour tout k , les deux suites exactes courtes scindées suivantes réunies par les homomorphismes naturels en un diagramme commutatif:*

$$(6.9.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma_k} & H_k(\tilde{P}) & \xrightarrow{f_k} & H_k(P) \rightarrow 0 \\ & & \uparrow \text{Id} & \subset & \uparrow h_k & \subset & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & H_{k-2}(M) & \xrightarrow{\sigma'_k} & H_k(\tilde{M}) & \xrightarrow{f'_k} & H_k(M) \rightarrow 0 \end{array}$$

Rappelons (cf. (6.5)) que l'homomorphisme σ'_k est donné par

$$(6.9.2) \quad \sigma'_k(z') = z' \times w \quad \text{pour} \quad z' \in H_{k-2}(M),$$

w étant la classe fondamentale de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ compatible avec son orientation canonique. Rappelons aussi (cf. (6.6)) que σ_k est alors précisément défini par la commutation du carré de gauche de ce diagramme et qu'une écriture plus parlante géométriquement en est donnée par (6.7). Rappelons enfin que nous utilisons la convention d'écriture (2.1) que nous avons appliquée à l'inclusion h nommée en (5.19) et aux applications f et f' introduites en (6.1) et (6.3) qui sont des restrictions convenables du morphisme d'éclatement, étant entendu que f' coïncide avec la première projection de $M \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Nous convenons, comme d'habitude, que $H_{k-2}(M) = 0$ pour $k < 2$. \square