

# 5. Spectral decomposition

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

we get

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi_1(\theta) \psi_2(\theta) ((q-1)^2 + 4q \sin^2(\theta)) d\theta,$$

and since  $\bar{F}_{\psi_2} = -F_{\bar{\psi}_2}$  we obtain (6).

## 5. SPECTRAL DECOMPOSITION

Let  $E$  be the space of functions  $F_\psi$  with  $\psi \in L^2([0, \pi])$ . It follows from §4 that  $E$  is a subspace of  $L^2(F)$ , invariant with respect to  $T$ . Further, let  $R$  be the two dimensional subspace generated by the discrete spectrum according to Corollary 3.7.

**THEOREM 5.1.** *We have a direct sum decomposition into invariant subspaces*

$$L^2(F) = R \oplus E.$$

*Proof.* The two spaces are easily seen to be orthogonal. We show that  $E^\perp = R$ . Let  $g \in L^2(F)$  such that  $\langle g, F_\psi \rangle = 0$  for all  $\psi$ , i.e.,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{q+1} g(0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi i(q+1) \sin \theta \psi(\theta) d\theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \psi(\theta) i(\sin((n+1)\theta) - q \sin((n-1)\theta)) d\theta q^{-\frac{n}{2}} \\ &= g(0) \hat{\psi}(1) + \sum_{n=1}^{\infty} g(n) (\hat{\psi}(n+1) - q \hat{\psi}(n-1)) q^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Therefore

$$g(0) \hat{\psi}(1) + \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \hat{\psi}(n+1) q^{-\frac{n}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} g(n+1) \hat{\psi}(n) q^{-\frac{n-1}{2}},$$

or (as  $\hat{\psi}(0) = 0$ )

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n-1) \hat{\psi}(n) q^{-\frac{n-1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} g(n+1) \hat{\psi}(n) q^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Since  $\psi \in L^2([0, \pi])$  and  $g \in L^2(F)$ , this can be viewed as an equality of inner products in the space  $l^2$  of square integrable sequences. Now as  $\psi$  varies over

$L^2([0, \pi])$ , the sequences  $\{\hat{\psi}(n)\}$  vary over  $l^2$ . Since the latter is a Hilbert space, it follows that for all  $n$ ,

$$g(n - 1) = g(n + 1) .$$

Let  $a = \frac{1}{2} (g(0) + g(1))$ ,  $b = \frac{1}{2} (g(0) - g(1))$ . Then

$$g(n) = a + (-1)^n b ,$$

a typical member of  $R$ .

**COROLLARY 5.2.** *The spectrum of  $T$  on  $L^2(F)$  is the subset of  $\mathbf{R}$  described in the Introduction.*

We wish to make this decomposition explicit, that is, given  $g \in E$  to find the  $\psi$  such that  $g = F_\psi$  (compare [H]). Let  $\phi(\theta)$  be the characteristic function of  $[\theta_0, \theta_0 + h] \subset [0, \pi]$ . Then

$$F_\phi(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+h} \tilde{f}_\theta(n) d\theta .$$

By the Plancherel formula (6),

$$\begin{aligned} \langle g, F_\phi \rangle &= \langle g, \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+h} \tilde{f}_\theta(n) d\theta \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi(\theta) \phi(\theta) ((q - 1)^2 + 4q \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+h} \psi(\theta) ((q - 1)^2 + 4q \sin^2 \theta) d\theta . \end{aligned}$$

Supposing further that  $g$  belongs in the dense subspace  $E \cap L^1(F)$ , we divide by  $h$  and let  $h \rightarrow 0$  to obtain

$$\langle g, \tilde{f}_{\theta_0} \rangle = \psi(\theta_0) ((q - 1)^2 + 4q \sin^2 \theta) / 2\pi .$$

Hence:

**THEOREM 5.3.** *Let  $u_1$  and  $u_2$  be the orthonormal basis of  $R$  given by*

$$u_1(n) \equiv \sqrt{\frac{q^2 - 1}{2q}} , \quad u_2(n) = \sqrt{\frac{q^2 - 1}{2q}} (-1)^n .$$

Then the spectral resolution of  $L^2(F)$  reads

(7)

$$g(n) = \sum_{i=1,2} \langle g, u_i \rangle u_i(n) + 2\pi \int_0^\pi \langle g, \tilde{f}_\theta \rangle \tilde{f}_\theta(n) \frac{d\theta}{(q-1)^2 + 4q \sin^2 \theta}.$$

We end this paper by showing that, as one might expect from the theory of Eisenstein series, the eigenfunctions  $f_\lambda$  can be parametrized as a family of functions that depend holomorphically on a complex parameter. Precisely, let

$$E(n, s) = q^{ns}(q^{s-1} - q^{1-s}) + q^{n(1-s)}(q^s - q^{-s}).$$

Then  $E(n, s)$  is entire in  $s$  and satisfies the functional equation

$$E(n, s) = -E(n, 1-s).$$

Furthermore, a direct computation shows that

$$(TE)(n, s) = (q^s + q^{1-s})E(n, s).$$

There are two ways in which  $\lambda = q^s + q^{1-s}$  can be real. Write  $s = \sigma + it$ .

If  $t = \frac{k\pi}{\log q}$  then  $\lambda = (-1)^k(q^\sigma + q^{1-\sigma})$ , and in particular

$$\lambda = q + 1 \quad (\lambda = -(q + 1))$$

if  $\sigma = 1$  and  $k$  is even ( $k$  is odd). Otherwise we must have  $\sigma = \frac{1}{2}$ . If we write

$t = \frac{\theta}{\log q}$  we obtain our  $\lambda = 2\sqrt{q} \cos \theta$ .

#### REFERENCES

- [B] BIGGS, N. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1974.
- [C1] CARTIER, P. Géométrie et analyse sur les arbres. *Sém. Bourbaki 1971/2*, exposé 407.
- [C2] — Harmonic analysis on trees. *Proc. of Symp. on Pure Mathematics*, vol. XXVI, 1973.
- [D] DRINFELD, V. G. Number of two-dimensional irreducible representations of the fundamental group of a curve over a finite field. *Funct. Anal. Appl.* 15, 4 (1982), 294-295.
- [E0] EFRAT, I. Automorphic spectra on the tree of  $PGL_2$ . *Publ. of MSRI*, No. 08908 (1986).