

3. List of small-faced affinely regular simplices

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3. LIST OF SMALL-FACED AFFINELY REGULAR SIMPLICES

An integral simplex S with small faces is affinely regular if and only if the numerated simplices S_v and $S_{v'}$ are equivalent for each pair v, v' of enumerations of S . In other terms, an integral simplex S with small faces of volume $k/n!$ is affinely regular if and only if $\rho_k(S_v) = \rho_k(S_{v'})$ for all enumerations v and v' , hence if and only if the element $\rho_k(S_v)$ is a fixed point under the action of σ_{n+1} on $\rho_k(\Sigma_k)$.

It is sufficient for $\rho_k(S_v)$ to be fixed under the action of a set of generators in order to be a fixpoint of σ_{n+1} acting on $\rho_k(\Sigma_k)$. Let us suppose that $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ is a fixpoint of $\rho_k(\Sigma_k)$. Then, for all $i \in \{1, \dots, n-2\}$:

$$\begin{aligned} (i, i+1) \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots, \alpha_{n-1}) \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

implies $\alpha_i \equiv \alpha \pmod{k}$ for some $\alpha \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$.

Furthermore

$$(n-1, n) \cdot (\alpha, \dots, \alpha, \alpha) = (-\alpha\alpha^{-1}, \dots, -\alpha\alpha^{-1}, \alpha^{-1}) = (\alpha, \dots, \alpha)$$

gives $\alpha \equiv -\alpha\alpha^{-1} \equiv -1 \pmod{k}$.

Finally

$$(0, 1) \cdot (-1, -1, \dots, -1) = (1 - (n-1)(-1), -1, \dots, -1) = (-1, \dots, -1)$$

implies $-1 \equiv 1 - (n-1)(-1) \pmod{k}$ namely $0 \equiv n+1 \pmod{k}$ namely $k \mid (n+1)$.

This shows that the simplices listed in the theorem are exactly all the affinely regular simplices with small faces.

We have yet to show that any affinely regular minimal simplex is small-faced. This will be the aim of the next paragraph.

4. ANY AFFINELY REGULAR MINIMAL SIMPLEX HAS SMALL FACES

Lemma 1.2 implies the following corollary:

COROLLARY 4.1. *Every integral simplex of \mathbf{Z}^n with numerated vertices is equivalent to an integral simplex with vertex v_0 at 0 and vertex v_i at the i -th vector-column of an upper triangular matrix ($i > 0$).*

Regularity and Proposition 0.4 imply almost immediately the following: