Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 37 (1991), p. 109-150

LONGUEUR STABLE DES COMMUTATEURS

par Christophe BAVARD

INTRODUCTION

A tout groupe Γ on associe classiquement son groupe dérivé Γ': c'est le sous-groupe de Γ engendré par *l'ensemble* des commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} (x, y \in \Gamma)$. Un élément donné γ de Γ' est de plusieurs façons possibles le produit de commutateurs. On appellera *longueur des commutateurs* de γ le nombre minimal de commutateurs nécessaires pour exprimer γ; cet entier sera noté $c_\Gamma(\gamma)$ ou simplement $c(\gamma)$.

En 1975, C. Edmunds a montré que la longueur des commutateurs est effectivement calculable dans les groupes libres [Ed] (voir aussi [Gr 1] p. 212). Un peu plus tard, R. Goldstein et E. Turner [G-T], ainsi que M. Culler [Cu] retrouvaient ce résultat en s'appuyant sur la topologie des surfaces; on propose dans la partie 2 une version élémentaire de leurs algorithmes. En particulier la propriété suivante ([Cu]) répond à une question de M. Newman ([Ne]): dans le groupe libre à deux générateurs u et v

$$c([u, v]^n) = E(n/2) + 1 \qquad (n \in \mathbf{N}^*) \tag{1}$$

où E est la partie entière. Par exemple $[u, v]^3$ est le produit de deux commutateurs seulement, comme le prouve l'identité remarquable ([Cu])

$$[u, v]^3 = [uvu^{-1}, v^{-1}uvu^{-2}]\,[v^{-1}uv, v^2]\ .$$

Il est intéressant d'étudier le comportement global de la longueur des commutateurs; on peut en particulier se demander si, pour un groupe donné Γ, cette fonction est bornée sur Γ'. Posons

$$c(\Gamma) = \sup\{c(\gamma); \gamma \in \Gamma'\}\ .$$

Pour le groupe libre à deux générateurs, on a $c = \infty$ (cela résulte, par exemple, de (1)). Cette quantité a été très étudiée pour les groupes linéaires des anneaux commutatifs, ainsi $c(SL_2(\mathbf{Z})) = \infty$ tandis que $c(SL_n(\mathbf{Z})) < \infty$ si $n \geqslant 3$ ([Ne]); voir [D-V] pour de nombreuses références. Par ailleurs S. Matsumoto et S. Morita ont montré que $c(\Gamma)$ peut contenir une information sur la *cohomologie bornée* à valeurs réelles de Γ notée $H_b^*(\Gamma, \mathbf{R})$: si Γ est uniformément parfait (i.e. $\Gamma' = \Gamma$ et $c(\Gamma) < \infty$) alors l'application naturelle $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est injective ([M-M]). Rappelons que $H_b^*(\Gamma, \mathbf{R})$ est l'homologie du complexe

$$0 \to \mathbf{R} \overset{d=0}{\to} C_b^1(\Gamma) \overset{d}{\to} C_b^2(\Gamma) \to \dots$$

où $C_b^n(\Gamma)$ désigne l'espace des fonctions *bornées* de Γ^n dans $\mathbf{R}$, avec pour $f \in C_b^n(\Gamma)\,(n \geqslant 1)$ la formule habituelle:

$$df(x_1, \dots, x_{n+1}) = f(x_2, \dots, x_{n+1})$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1, \dots, x_i x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Afin de préciser cette relation entre commutateurs et cohomologie bornée on définit la *longueur stable* d'un élément γ dans Γ':

$$\| \gamma \| = \lim_{n \to \infty} \frac{c(\gamma^n)}{n}\,.$$

Il faut noter que d'après l'inégalité

$$c(\gamma_1 \gamma_2) \leqslant c(\gamma_1) + c(\gamma_2) \qquad (\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma')$$

la suite $c(\gamma^n)$ est sous-additive, donc la limite ci-dessus existe (voir [P-S, partie I, exercice 99]). Cela étant, on établira le

THÉORÈME. *L'application* $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ *est injective si et seulement si la longueur stable est nulle sur* Γ'.

La connaissance de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ nous renseigne donc sur la longueur stable: celle-ci est toujours nulle pour un groupe moyennable (par exemple résoluble) puisque sa cohomologie bornée est triviale ([Gr 2] ou [Iv]).

Le noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est de codimension finie pour une large classe de groupes intéressants, tels que les groupes fondamentaux de polyèdres compacts. Quand la longueur stable est nulle, on voit donc que l'espace $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R})$ est «petit».

C'est la notion de *quasi-morphisme* qui relie commutateurs et cohomologie bornée. Une application $f: \Gamma \to \mathbf{R}$ est un *quasi-morphisme* si $f(xy) - f(x) - f(y)$ est borné $(x, y \in \Gamma)$. D'une part, la donnée d'une telle application permet de minorer la longueur des commutateurs, selon une méthode qui remonte à Milnor [Mil] (voir 1.1); d'autre part les quasi-morphismes décrivent le noyau de $H_b^2(\Gamma, \mathbf{R}) \to H^2(\Gamma, \mathbf{R})$ puisque

$f(xy) - f(x) - f(y)$ est le cobord de f. En fait ce noyau est isomorphe par le cobord à l'espace K des quasi-morphismes *homogènes* $\varphi : \Gamma \to \mathbf{R}$ (i.e. $\varphi(x^n) = n\varphi(x), x \in \Gamma, n \in \mathbf{Z}$) définis à l'addition d'un morphisme près (voir [Be] ou 3.3). La longueur stable apparaît alors comme une version duale d'une norme naturelle sur K:

$$\| \varphi \| = \sup\{ | \varphi([x, y]) | ; \ x, y \in \Gamma \} .$$

Plus précisément:

THÉORÈME DE DUALITÉ. *Pour tout élément* γ *de* Γ' *on a la relation*

$$\| \gamma \| = \frac{1}{2} \sup_{\varphi \in K} \frac{| \varphi(\gamma) |}{\| \varphi \|} .$$

Ce résultat met en évidence la longueur stable comme une quantité naturelle du point de vue de la cohomologie bornée, puisqu'elle est déterminée par les quasi-morphismes. La longueur des commutateurs, quant à elle, est seulement *minorée* par les quasi-morphismes (voir 1.1).

Cet article comprend trois parties. La première contient une preuve élémentaire de la formule (1) ainsi qu'une petite généralisation. Dans la partie 2, on détermine la longueur des commutateurs dans les groupes libres; on y considère également les produits de carrés car ils s'interprètent topologiquement comme les produits de commutateurs (par des surfaces). Enfin, la troisième partie est consacrée à l'étude de la longueur stable; on décrit le phénomène de dualité avec la cohomologie bornée et les propriétés qui en découlent.

Je remercie Etienne Ghys pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Il m'a expliqué que le genre des classes d'homologie de dimension 2 ([B-G]) s'interprète comme nombre minimal de commutateurs. J'ai apprécié sa disponibilité et ses judicieux conseils.

1. LONGUEUR DE $[u, v]^n$.

L'objectif de cette partie est d'établir le théorème suivant, qui généralise la relation (1) de l'introduction:

THÉORÈME 1. *Dans le groupe libre à* $2k$ *générateurs* $(k \in \mathbf{N}^*)$

$$u_i, v_i \qquad (i = 1, \ldots, k)$$