

# EXEMPLES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES

Autor(en): **Audin, Michèle**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-58736>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## EXEMPLES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES

par Michèle AUDIN<sup>1)</sup>

### 1. INTRODUCTION

#### 1.1. LE PROBLÈME

A l'origine de ce travail, j'ai essayé de comprendre pourquoi il était si difficile de construire des exemples de variétés symplectiques compactes. En général, on essaie de construire de nouveaux exemples en modifiant ceux qu'on connaît déjà. L'idée la plus simple est de faire des chirurgies, en particulier des sommes connexes... et l'essentiel de ces notes tourne autour du fait que ce n'est pas possible (sauf dans le cas des surfaces)<sup>2)</sup>.

Si une variété paracompacte  $W$  possède une 2-forme  $\omega$  non-dégénérée, alors elle possède des structures presque complexes (et inversement): le groupe structural admet alors une réduction au groupe  $\mathrm{Sp}(2n)$  des isométries d'une forme bilinéaire alternée non-dégénérée sur  $\mathbf{R}^{2n}$ , groupe dont  $U(n)$  est la composante compacte.

Pour que  $W$  soit une variété symplectique, il faut en plus que la forme  $\omega$  soit *fermée*. On sait, et on en aura confirmation dans cet article, que cette condition impose des restrictions très sévères. Il n'est resté pas moins que l'existence d'une structure presque complexe sur  $W$  est une condition nécessaire à l'existence d'une forme symplectique. Nous allons donc montrer quelques résultats sur les variétés presque complexes, qui pour être assez simples, sont apparemment mal (ou pas?) connus.

En appendice, le lecteur trouvera une démonstration du fait qu'il n'y a pas de somme connexe dans la catégorie symplectique, même dans les cas où il n'y a pas de difficulté de nature presque complexe. Le résultat est dû à Gromov [3], mais son article ne contient pas de démonstration détaillée.

---

<sup>1)</sup> Cet article est une extension des notes [1] d'un exposé fait au Séminaire de Géométrie de l'Université de Montpellier en mars 1990. Outre Jacques Lafontaine et les participants de ce séminaire, je remercie Dusa McDuff pour [6] et pour ses remarques récentes.

<sup>2)</sup> Dans le cas des variétés de contact, toutes les chirurgies sont possibles (*voir* [10] et [11]).

## 1.2. SOMMES CONNEXES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES

Remarquons que, sauf en dimensions 2 et 6, il n'est pas possible de mettre une structure presque complexe «somme connexe» sur la somme connexe de deux variétés presque complexes.

PROPOSITION 1.2.1. *Si  $(V_1, J_1)$  et  $(V_2, J_2)$  sont deux variétés presque complexes de dimension  $\neq 2$  ou 6, il n'existe aucune structure presque complexe  $J$  sur  $W = V_1 \# V_2$  qui induise une structure homotope à  $J_i$  sur le complémentaire dans  $V_i$  du disque utilisé pour faire la chirurgie.*

*Démonstration.* Sur le disque  $D_i$  utilisé pour faire la chirurgie dans  $V_i$ , le fibré tangent à  $V_i$  est trivialisable. Supposons qu'une trivialisaton en soit fixée. Pour construire le fibré tangent à  $W = V_1 \# V_2$ , il suffit de recoller ces trivialisations, le long du bord  $S^{2n-1}$  par une application

$$\tau = S^{2n-1} \rightarrow SO(2n) .$$

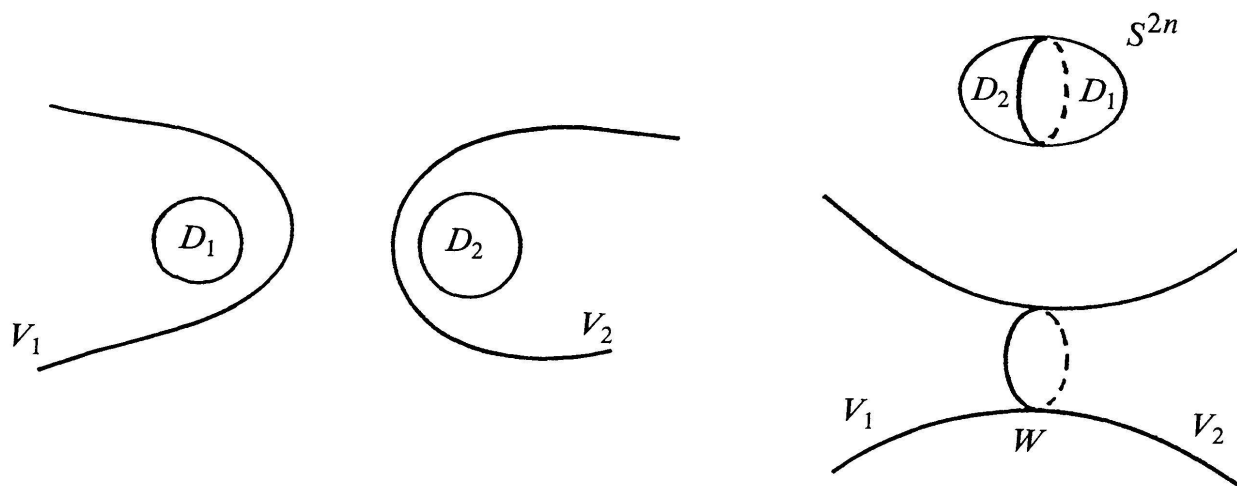


FIGURE 1

Outre le fibré tangent à  $W$ ,  $\tau$  permet de construire... le fibré tangent à la sphère  $S^{2n}$  comme on le voit sur la figure 1.

Prolonger des structures complexes  $J_1$  et  $J_2$  données sur  $V_1$  et  $V_2$  revient à relever  $\tau$  en une application

$$\tilde{\tau} : S^{2n-1} \rightarrow U(n)$$

ce qui n'est donc possible que quand la sphère  $S^{2n}$  possède une structure presque complexe, c'est-à-dire quand  $n = 1$  ou 3.  $\square$

*Remarque.* Rappelons que, par intégralité du caractère de Chern de la sphère  $S^{2n}$ , celle-ci ne peut avoir de structure presque complexe que si sa caractéristique d'Euler est divisible par  $(n-1)!$  (voir par exemple [5]), donc si  $n = 1, 2$  ou  $3$  mais dans le cas  $n = 2$  ça ne marche pas non plus à cause du théorème de la signature comme on va le voir. Par ailleurs, chacun connaît une structure presque complexe sur  $S^2$  et il n'est pas très difficile d'en construire sur  $S^6$  (voir par exemple [4]).

La situation est encore plus grave en dimension 4 où il suffit que  $V_1$  et  $V_2$  possèdent une structure presque complexe pour que  $V_1 \# V_2$  n'en possède aucune.

### 1.3. STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES EN DIMENSION 4

Si  $W$  est une variété fermée orientée de dimension 4 et si  $J$  est une structure presque complexe sur  $W$  alors le fibré tangent  $(TW, J)$  possède, comme tout fibré vectoriel complexe de cette dimension, deux classes de Chern  $c_1 \in H^2(W; \mathbf{Z})$  et  $c_2 \in H^4(W; \mathbf{Z})$ . Elles sont reliées à la signature  $\sigma$  de (la forme d'intersection de)  $W$  par la formule de Hirzebruch:

$$\langle c_1^2 - 2c_2, [W] \rangle = 3\sigma .$$

La classe de Chern de degré maximal  $c_2$  est la classe d'Euler de  $TW$  et ne dépend pas de  $J$ . En appelant  $Q$  la forme quadratique sur  $H^2(W; \mathbf{Z})$  et  $\chi$  la caractéristique d'Euler, on voit que  $c_1(TW, J)$  doit vérifier

$$Q(c_1) = 2\chi + 3\sigma .$$

Pour qu'une structure presque complexe  $J$  puisse exister sur  $W$ , il est donc nécessaire que  $H^2(W; \mathbf{Z})$  contienne une classe  $x$  qui vérifie:

$$(1) \quad \begin{cases} Q(x) = 2\chi + 3\sigma \\ \rho_2(x) = w_2 \end{cases}$$

(la réduction modulo 2 de la classe  $c_1$  est la classe de Stiefel-Whitney  $w_2$ ).

*Exemple.* Pour que la somme connexe  $\# \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  de  $n$  copies de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  possède une structure presque complexe, il faut que  $n$  soit impair.

*Démonstration.* Dans ce cas on a  $\chi = n + 2, \sigma = n$  et dans la base évidente de  $H^2(\# \mathbf{P}^2(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$ , la forme quadratique est diagonalisée en

$$Q = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$



On doit donc pouvoir trouver des entiers *impairs*  $(a_1, \dots, a_n)$  tels que

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 = 2(n+2) + 3n = 5n + 4.$$

En calculant modulo 8 on voit que  $n \equiv 5n + 4 \pmod{8}$  et donc que  $n$  doit être impair.  $\square$

Si on se rappelle, que grâce à Wu [12],  $w_2$  est caractéristique pour  $Q$ , c'est-à-dire que

$$\langle w_2 \cup \rho_2(x), [W] \rangle = Q(x) \pmod{2}$$

pour tout  $x$  de  $H^2(W; \mathbf{Z})$ , on montre de façon analogue:

PROPOSITION 1.3.1. *Si  $V_1$  et  $V_2$  sont deux variétés presque complexes de dimension 4, la somme connexe  $V_1 \# V_2$  ne possède aucune structure presque complexe.*

COROLLAIRE 1.3.2. *Si  $W$  est une variété de dimension 4 qui possède une structure presque complexe, alors  $W \# \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  n'en possède aucune.*  $\square$

Par exemple  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \# \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$  ne possède aucune structure presque complexe, *a fortiori* aucune forme symplectique. En effet

$$\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \# \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$$

est le résultat de l'éclatement de  $n$  points de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  et porte donc une structure complexe.

*Remarque.* En dépit de la notation,  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \# \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$  n'est bien sûr pas une somme connexe de variétés presque complexes: il n'y a aucune structure presque complexe sur  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  qui induise l'orientation opposée (c'est-à-dire celle qui définit l'objet noté  $\overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}$ ).

*Démonstration de la proposition.* Soit  $x_i$  la première classe de Chern de  $(V_i, J_i)$ , de sorte que

$$Q_i(x_i) = 2\chi(V_i) + 3\sigma(V_i)$$

Supposons que la somme connexe  $W$  possède une structure presque complexe. Elle va ainsi acquérir une première classe de Chern

$$y = (y_1, y_2) \in H^2(V_1; \mathbf{Z}) \oplus H^2(V_2; \mathbf{Z}) = H^2(W; \mathbf{Z})$$

qui vérifiera:

$$\begin{aligned} Q(y) &= Q_1(y_1) + Q_2(y_2) \\ &= 2\chi(W) + 3\sigma(W) \\ &= 2(\chi(V_1) + \chi(V_2) - 2) + 3(\sigma(V_1) + \sigma(V_2)) \end{aligned}$$

Mais  $y$  est caractéristique pour  $Q$ , sa réduction modulo 2 est la deuxième classe de Stiefel-Whitney de  $W$  ce qui fait que  $y_i$  a même réduction modulo 2 que  $x_i$  et est donc caractéristique... d'où on déduit, en calculant modulo 8:

$$\begin{aligned} 2(\chi(V_1) + \chi(V_2) - 2) + 3(\sigma(V_1) + \sigma(V_2)) &\equiv Q_1(y_1) + Q_2(y_2) \\ &\equiv Q_1(x_1) + Q_2(x_2) \\ &\equiv 2\chi(V_1) + 3\sigma(V_1) + 2\chi(V_2) \\ &\quad + 3\sigma(V_2) \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque 4 n'est pas divisible par 8.  $\square$

Ce n'est pas vraiment un problème de somme connexe mais un problème de chirurgie: si on ajoute une anse d'indice 0 sur une même composante d'une variété  $W$ , on a un résultat tout à fait analogue.

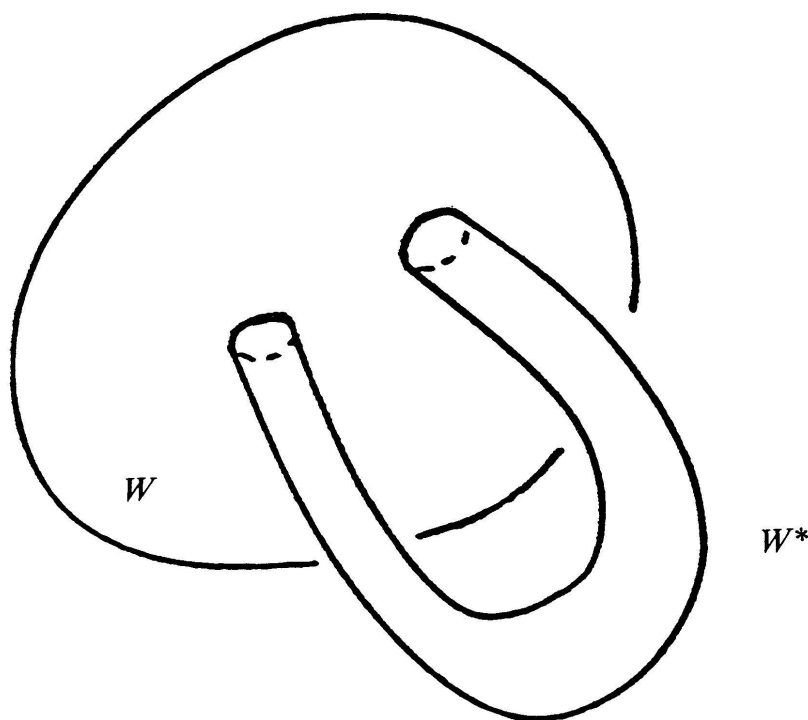


FIGURE 2

La variété «chirurgisée»  $W^*$  a le même  $H^2$  que  $W$  et sa caractéristique d'Euler est

$$\chi(W^*) = \chi(W) - 2.$$

Si  $W$  est presque complexe, soit  $x$  sa première classe de Chern. On a  $Q(x) = 3\sigma + 2\chi$ . Pour que  $W^*$  possède une structure presque complexe quelle qu'elle soit, il faut qu'on puisse trouver un  $y \in H^2(W; \mathbf{Z})$  avec  $\rho_2(y) = \rho_2(x) = w_2$  et  $Q(y) = 3\sigma + 2\chi - 4$  ce qui est interdit par le même calcul modulo 8.  $\square$

C'est encore un théorème de Wu [12] qui affirme que l'existence d'une classe  $x$  vérifiant (1) est suffisante pour l'existence d'une structure presque complexe  $J$  (dont  $x$  est alors la première classe de Chern, plus précisément la classe d'homotopie de  $J$  est déterminée par cet  $x$ ).

*Exemple.* Pour que la somme connexe  $\#^n \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  de  $n$  copies de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  possède une structure presque complexe, il suffit que  $n$  soit impair.

*Démonstration.* Montrons en effet que l'équation (2) a toujours des solutions. C'est évidemment le cas pour  $n = 1$  (!) et bien sûr, si  $(a_1, \dots, a_n)$  est une solution

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + 1 + 9 = 5n + 4 + 10 = 5(n+2) + 4$$

et  $(a_1, \dots, a_n, 1, 3)$  est une solution (pour  $n+2$ ).  $\square$

*Remarque.* Dès que  $n \geq 5$ , l'équation (2) a d'autres solutions que celles obtenues par récurrence ci-dessus, par exemple  $(5, 1, 1, 1, 1)$  et celles qu'on en déduit en ajoutant des  $(1, 3)$ .

*Exemple.* On en déduit que  $\#^n \mathbf{P}^2 \#^m \overline{\mathbf{P}^2}$  a une structure presque complexe si et seulement si  $n$  est impair. Comme on a dit, ajouter un  $\overline{\mathbf{P}^2}$  peut se faire en éclatant un point, ce qui fait qu'on peut en ajouter autant qu'on veut à  $\#^n \mathbf{P}^2$  (pour  $n$  impair) et obtenir une variété presque complexe. Au contraire si  $n = 2p$ , alors  $\#^n \mathbf{P}^2 \#^m \overline{\mathbf{P}^2} = (\#^{2p-1} \mathbf{P}^2 \#^m \overline{\mathbf{P}^2}) \# \mathbf{P}^2$  est la somme connexe de deux variétés possédant des structures presque complexes et donc n'en possède pas.  $\square$

*Remarque.* Il y a aussi des structures presque complexes sur  $\#^n \mathbf{P}^2 \#^m \overline{\mathbf{P}^2}$  qui ne correspondent pas à des éclatements de  $\#^n \mathbf{P}^2$ . L'équation analogue à (2) est

$$(3) \quad a_1^2 + \cdots + a_n^2 - b_1^2 - \cdots - b_m^2 = 3(n - m) + 2(n + m + 2) \\ = 5n - m + 4$$

(toujours en entiers impairs) qui a bien sûr comme solutions les

$$(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1)$$

où  $(a_1, \dots, a_n)$  est solution de (2), mais aussi par exemple pour  $n = 1$  et  $m \geq 2$ :  $(5, 3, 3, 1, \dots, 1)$  et pour  $n = 3$  et  $m \geq 1$ :  $(3, 3, 3, 3, 1, \dots, 1)$ .

## 2. ANSES PRESQUE COMPLEXES

### 2.1. ANSES CLASSIQUES

Il est assez clair que le mal vient du fait que  $S^4$  ne possède pas de structure presque complexe. Essayons donc de remplacer  $S^4$  par une variété presque complexe pas trop compliquée. La chirurgie considérée ci-dessus peut se décrire ainsi:

$$W^* = \overline{W - (S^0 \times B^4)} \cup_{\partial} (B^1 \times S^3) \\ = \overline{W - (S^0 \times B^4)} \cup_{\partial} \overline{S^4 - (S^0 \times B^4)}$$

où le recollement se fait maintenant par un difféomorphisme des bords qui renverse l'orientation.

### 2.2. ANSES PRESQUE COMPLEXES

Cette description se prête à une généralisation: on y remplace  $S^4$  par une variété fermée (c'est-à-dire compacte sans bord) et connexe  $V$ .

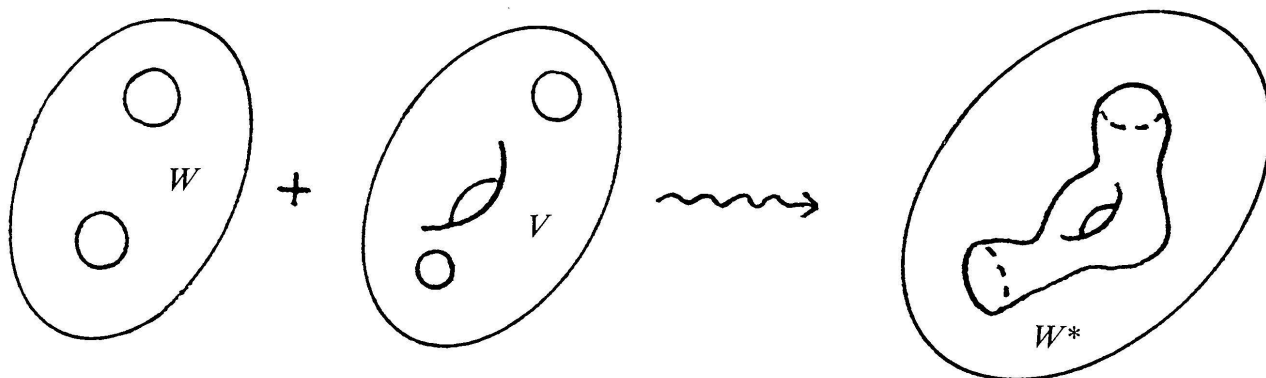


FIGURE 3

On appelle  $\mathcal{V} = \overline{V - (S^0 \times B^4)}$ ,  $\mathcal{W} = \overline{W - (S^0 \times B^4)}$  et  $W^* = \mathcal{W} \cup_{\partial} \mathcal{V}$ , on suppose que  $V$  est simplement connexe pour simplifier. L'homologie de  $\mathcal{V}$  et celle de  $\mathcal{W}$  se calculent facilement à l'aide des longues suites exactes. On en déduit ensuite celle de  $W^*$  par Mayer-Vietoris.

Pour ce qui est de la forme quadratique et de la signature, on trouve des isomorphismes

$$H_2(W) \oplus H_2(V) \leftarrow H_2(\mathcal{W}) \oplus H_2(\mathcal{V}) \rightarrow H_2(W^*).$$

Pour ce qui est de la caractéristique d'Euler, que les deux disques soient pris ou non dans la même composante de  $W$ , on trouve

$$\chi(W^*) = \chi(W) + \chi(V) - 4.$$

Pour construire une structure presque complexe sur  $W^*$ , il suffit donc de trouver  $(x, y) \in H_2(W) \oplus H_2(V)$ , caractéristiques et tels que

$$Q_W(x) + Q_V(y) = 2(\chi(W) + \chi(V) - 4) + 3(\sigma(W) + \sigma(V)).$$

Supposons que  $x$  soit le  $c_1$  d'une structure presque complexe sur  $W$  et considérons  $V$  et  $y$  comme des inconnues. Il faut donc que  $y$  soit caractéristique et que

$$Q_V(y) = 2\chi(V) + 3\sigma(V) - 8.$$

En particulier, alors que  $y$  n'est certainement la première classe de Chern d'aucune structure presque complexe sur  $V$ , il est remarquable qu'il n'y a plus aucune obstruction modulo 8 à l'existence d'un tel  $y$ ... dès lors que  $V$  possède une structure presque complexe.

La «plus petite» solution possible est certainement  $V = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  et  $y$  un générateur de  $H^2(V; \mathbf{Z})$  (rappelons que le  $c_1$  de n'importe quelle structure presque complexe sur  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  est 3 fois le générateur). On voit ainsi  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  jouer encore une fois le rôle de la sphère quand celle-ci refuse sa coopération, ici dans le cadre presque complexe.

*Remarque.* Il y a bien d'autres solutions possibles ne serait-ce que parce qu'il suffit d'éclater des points dans une solution pour en construire d'autres.

La structure presque complexe ainsi obtenue sur la variété «chirurgisée»  $W^*$  se restreint en une structure presque complexe homotope à la structure donnée sur le complémentaire des disques utilisés dans  $W$ , par contre, répétons que sa restriction à l'«anse» n'est la restriction d'aucune structure presque complexe sur  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ .

Appelons *anse presque complexe* la donnée de la variété à bord

$$\mathcal{V} = \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) - S^0 \times B^4}$$

et de la classe  $y$ , générateur de  $H^2(\mathcal{V}; \mathbf{Z}) = H^2(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$ .

Remarquons que dans le cas d'une variété ouverte ou à bord comme notre anse presque complexe, il est facile de vérifier que pour qu'une classe  $y \in H^2(\mathcal{V}; \mathbf{Z})$  soit la première classe de Chern d'une structure presque complexe, il faut et il suffit que  $\rho_2 y = w_2$ .

*Remarque.* Les solutions de (2) dont nous avons indiqué la construction par récurrence pour  $n$  impair entrent précisément dans ce cadre: on commence par connecter deux copies de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  qu'on connecte par une anse presque complexe, la variété obtenue est  $\#^3 \mathbf{P}^2$ , avec la structure presque complexe déterminée par les entiers (3, 1, 3) (fig. 4). On connecte encore une copie de  $\mathbf{P}^2$  par une anse presque complexe, obtenant ainsi  $\#^5 \mathbf{P}^2$  avec (3, 1, 3, 1, 3) et ainsi de suite.

La construction de  $W^*$  est une manipulation topologique un peu violente, à laquelle il n'est pas étonnant que les structures complexes (intégrables) résistent, de même que les structures symplectiques:

PROPOSITION 2.2.1. *Il n'existe aucune structure complexe (resp. forme symplectique) sur l'anse presque complexe qui se recolle à chaque extrémité à la structure standard de  $\mathbf{C}^2$ .*

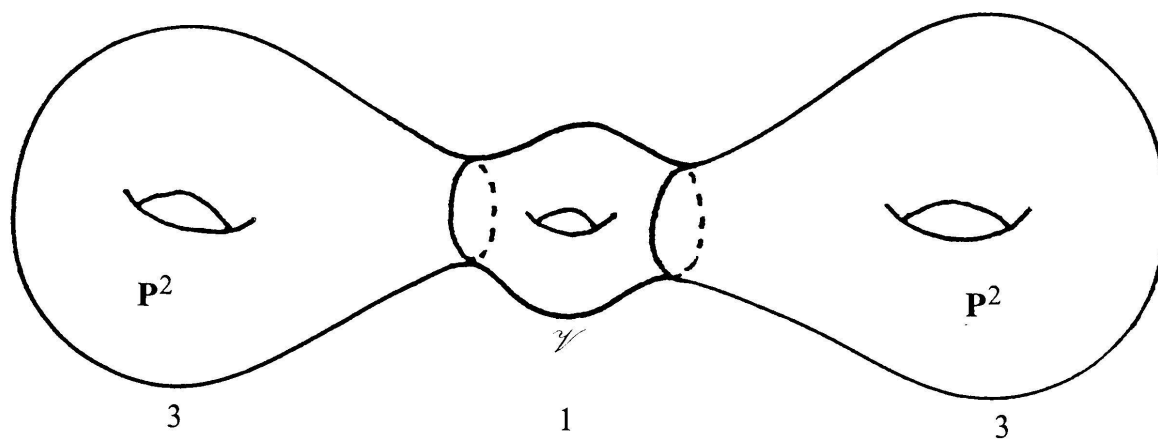


FIGURE 4

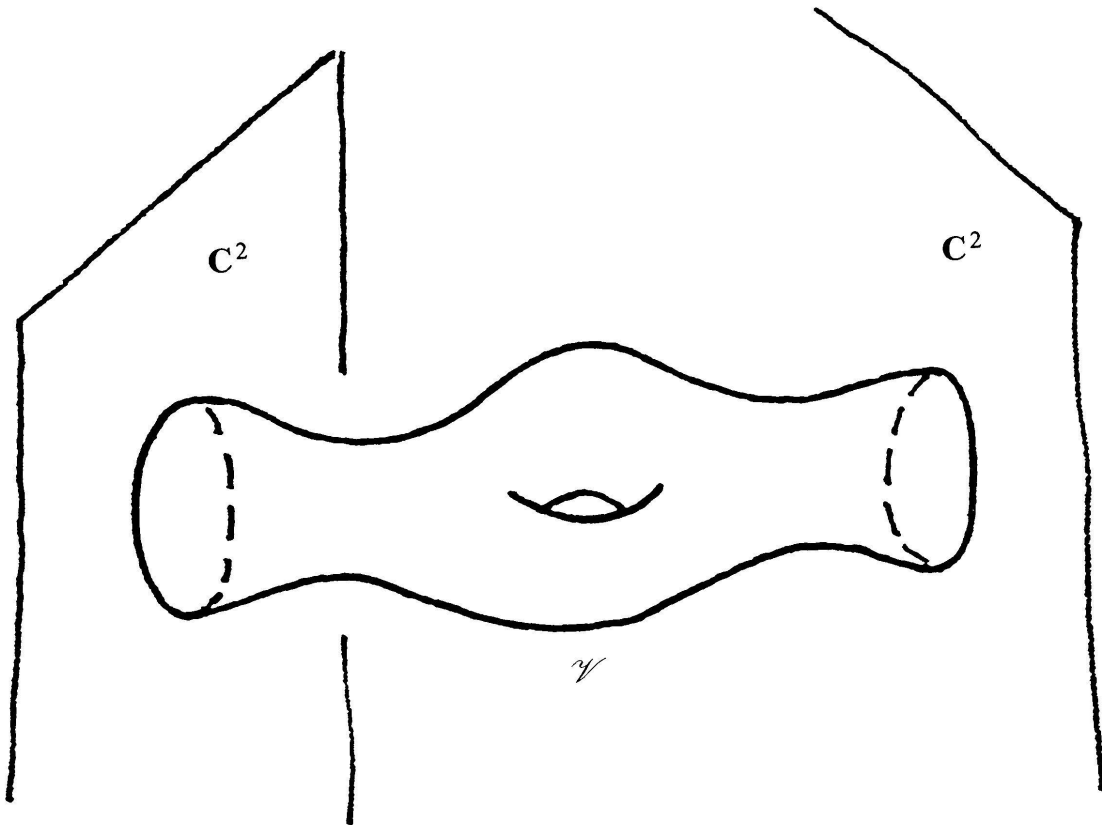


FIGURE 5

*Démonstration.* Sinon, on pourrait recoller cette anse à la structure standard de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  (fig. 5). La variété  $W^*$  obtenue contiendrait alors une courbe rationnelle (un  $\mathbf{P}^1$  standard de  $\mathbf{P}^2$ ) à auto-intersection positive, ce qui est exclu dans les deux cas:  $W^*$  serait minimale (la forme d'intersection est positive) mais n'est ni  $\mathbf{P}^2$  ni un fibré en  $\mathbf{P}^1$  comme on le vérifie aisément par un calcul de caractéristique d'Euler, ce qui contredit [2, V.4.3] dans le cas complexe<sup>3)</sup> et [8] dans le cas symplectique.  $\square$

*Remarque.* En fait, c'est une conséquence simple de l'inégalité de Miyaoka  $c_1^2 \leq 3c_2$  (voir par exemple [2]) que  $\# \mathbf{P}^2$  et plus généralement  $\# \mathbf{P}^2$  pour  $n > 1$  ne possède aucune structure complexe intégrable. En effet  $\# \mathbf{P}^2$  serait nécessairement une surface de type général (voir la classification d'Enriques-Kodaira par exemple dans [2]) avec  $c_1^2 = 5n + 4$  et  $c_2 = n + 2$  d'où

<sup>3)</sup> Pour ne pas allonger démesurément la bibliographie, j'ai renvoyé au livre [2] pour tous les résultats sur les surfaces complexes. On y trouvera les références aux travaux originaux.

$$c_1^2 - 3c_2 = 5n + 4 - 3(n + 2) = 2n - 2 \leq 0$$

ce qui n'est possible que pour  $n = 1$ .

Plus généralement, on peut construire par cette « chirurgie » de nombreuses variétés presque complexes sans structure complexe puisque l'opération augmente  $c_1^2$  de 1 et diminue  $3c_2$  de 2.

### 2.3. ANSES D'INDICE 1

On peut jouer au même jeu avec des chirurgies d'indice supérieur. On trouve toujours une impossibilité à la chirurgie ordinaire, mais une possibilité d'ajouter une anse presque complexe. A titre d'exemple simple, détaillons ici le cas des anses d'indice 1.

On choisit un plongement à fibré normal trivial de  $S^1$  dans  $W$  (resp.  $V$ ). On écrit comme plus haut  $\mathcal{W} = \overline{W - S^1 \times B^3}$ , et  $\mathcal{V} = \overline{V - S^1 \times B^3}$  ( $V$  est la variété inconnue, que l'on suppose simplement connexe). Les mêmes méthodes que ci-dessus fonctionnent pour donner

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{V} \rightarrow H_2 V \rightarrow 0$$

( $H_2 \mathcal{V}$  est somme de  $H_2 V$  et du facteur  $\mathbf{Z}$  engendré par une sphère  $* \times S^2 = \partial(* \times B^3)$  fibre du fibré en sphères normal à  $S^1$ ). Supposons  $W$  simplement connexe, on a de même

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \rightarrow H_2 W \rightarrow 0$$

et Mayer-Vietoris donne

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \oplus H_2 \mathcal{V} \rightarrow H_2 W^* \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

(les deux sphères sont les mêmes dans  $W^*$ ).

Ainsi  $b_2(W^*) = b_2(W) + b_2(V) + 2$ ,  $\sigma(W^*) = \sigma(W) + \sigma(V)$ : on a rajouté un facteur hyperbolique comme on s'en convainc agréablement en imaginant que  $W = V = S^4$  et donc que  $W^* = S^2 \times S^2$ ; de plus  $\chi(W^*) = \chi(W) + \chi(V)$ .

Si  $x$  est la première classe de Chern de  $W$ , l'équation à résoudre est

$$(4) \quad Q_W(x) + Q_V(y) + 2uv = 2(\chi(W) + \chi(V)) + 3(\sigma(V) + \sigma(W))$$

où  $x$  et  $y$  sont caractéristiques et  $u$  et  $v$  sont pairs.

Cette fois on peut prendre pour  $V$  n'importe quelle variété presque complexe (avec  $y$  le  $c_1$  d'une structure presque complexe) avec  $u$  ou  $v$  nul; on peut aussi choisir  $u = v = 2$  (ce qui correspond à la structure complexe usuelle dans le cas de  $S^2 \times S^2$ )... et  $V$  et  $y$  comme ci-dessus ( $2uv = 8$ ).



Appelons *anse presque complexe d'indice 1* le choix de  $\mathcal{V}$  obtenu à partir de  $V = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  avec la structure complexe usuelle (alors  $uv = 0$ ). On a comme plus haut :

PROPOSITION 2.3.1. *Il n'existe aucune structure complexe intégrable (resp. symplectique) sur l'anse presque complexe d'indice 1 qui se recolle à la structure usuelle de  $\mathbf{C}^2 - S^1 \times B^3$  (où  $S^1 \times B^3$  est un voisinage tubulaire d'un petit cercle standard de  $\mathbf{C}^2$ ).*

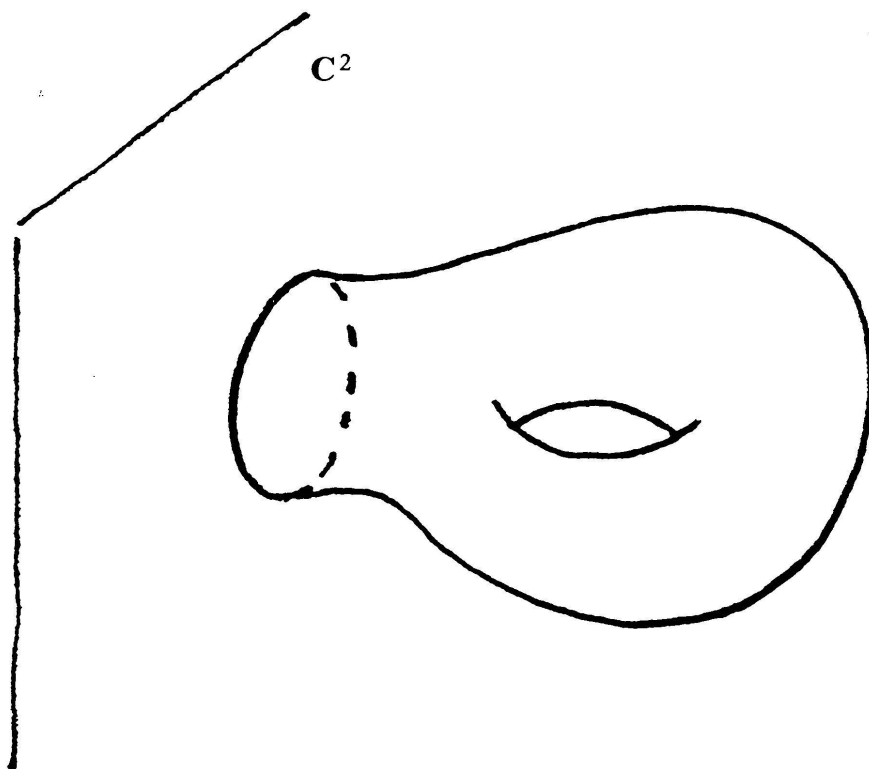


FIGURE 6

*Démonstration.* Supposons qu'une telle structure existe. En plongeant  $\mathbf{C}^2$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  on construit une variété complexe (resp. symplectique) compacte dont la forme d'intersection s'écrit  $a^2 + 2bc + d^2$  et qui contient une courbe rationnelle plongée (une droite projective de l'exemplaire de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  obtenu en complétant le  $\mathbf{C}^2$  standard) d'auto-intersection  $+1$ . La forme  $2bc + d^2$  est équivalente (sur  $\mathbf{Z}$ ) à  $-x^2 + y^2 + z^2$  ce qui fait qu'un modèle minimal de notre surface complexe (variété symplectique) va être une surface avec forme d'intersection  $a^2 + y^2 + z^2$  et une courbe rationnelle à auto-intersection  $+1$  (nous n'avons pas modifié le  $a^2$ ). Ceci est interdit comme plus haut.  $\square$

*Remarque.* La proposition reste vraie si on remplace le  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  ayant permis de construire l'anse  $\mathcal{V}$  par une variété presque complexe  $V$  dont la forme d'intersection est définie positive et de type I (c'est-à-dire prend des valeurs paires et impaires). La démonstration est identique: la forme  $2bc + Q_V(d)$  prend la valeur  $-1$  (si  $d$  est tel que  $Q_V(d) = 2m - 1$ , on prend  $b = 1$  et  $c = -m$ ), elle est donc équivalente (sur  $\mathbf{Z}$ ) à  $-x^2 + Q(y)$  où  $Q$  est une forme quadratique entière de rang  $b_2(V) + 1$  et de signature  $\sigma(V) + 1$  donc définie positive. Un modèle minimal de notre variété aura une courbe rationnelle à auto-intersection positive et une forme d'intersection  $a^2 + Q(y)$  ce qui n'est pas possible pour les mêmes raisons.

### 3. APPENDICE: SOMMES CONNEXES DE VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

#### 3.1. STRUCTURE SUR LES TUBES

Naïvement, on pourrait espérer construire une forme symplectique «somme connexe» en faisant la chirurgie sur des disques contenus dans des ouverts de Darboux et en construisant une forme symplectique sur le tube  $S^{2n-1} \times I$  qui se recolle de chaque côté avec la structure standard de  $\mathbf{R}^{2n}$  - Disque. Les remarques précédentes impliquent qu'une telle forme n'existe certainement pas en dimension  $\neq 2$  ou  $6$ . Les arguments utilisés sont assez grossiers (structure presque complexe au lieu de forme symplectique) et, en réponse à ma question sur la dimension  $6$ , Dusa McDuff [6] m'a fourni un argument plus fin, basé sur les techniques de Gromov [3], que je vais décrire maintenant et qui montre qu'une telle forme n'existe sur aucun tube  $S^{2n-1} \times I$  (pour  $n \geq 2$ ).

#### 3.2. LE CONTRE-EXEMPLE

Il suffit donc d'exhiber deux variétés symplectiques de dimension  $6$ ,  $(V_1, \omega_1)$  et  $(V_2, \omega_2)$  telles que sur  $W = V_1 \# V_2$ , aucune forme symplectique  $\omega$  ne puisse avoir, en restriction à  $V_1$ , une propriété que possède  $\omega_1$ .

PROPOSITION 3.2.1. [3, 2.4.B<sub>3</sub>], [6.9] *Sur  $W = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \# T^{2n}$ , il n'existe aucune forme symplectique  $\omega$  qui admette  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  comme sous-variété symplectique.*

*Remarque.* D'après 1.2 et [9],  $\mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \# T^6$  possède des structures presque complexes.

*Démonstration.* On va utiliser le fait que l'une des variétés est  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  parce qu'on connaît beaucoup de courbes holomorphes et leurs propriétés dans celle-ci; c'est seulement à la fin de l'argument qu'on utilisera vraiment que l'autre variété est un tore. Supposons donc que  $\omega$  soit une forme symplectique sur  $W$  telle qu'un hyperplan  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  (non touché par la chirurgie) en soit une sous-variété symplectique. Soit  $J_0$  une structure presque complexe adaptée à  $\omega$  et qui soit la structure standard au voisinage de ce  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ . Soit  $A \in H_2(W; \mathbf{Z})$  la classe d'homologie d'une droite  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \subset \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \subset W$ .

Remarquons d'abord que cette classe est simple: elle engendre l'image de  $\pi_2(W)$  et ne peut donc s'écrire comme somme de classes représentées par des courbes holomorphes (pour aucune structure presque complexe adaptée à  $\omega$ ). Ainsi, d'après Gromov, l'espace  $M_p(J, A)/G$  des courbes  $J$ -holomorphes (non paramétrées) de la classe  $A$  est une variété compacte pour  $J$  générique.

On va considérer les courbes de la classe  $A$  qui passent par deux points fixés en utilisant l'application d'évaluation

$$e_J: M_p(J, A) \times_G (S^2 \times S^2) \rightarrow W \times W$$

(où le groupe  $G = PSL_2(\mathbf{C})$  opère par changement de paramétrage). Si  $J$  est générique, on a affaire à deux variétés compactes de dimension  $4n$ . En effet

$$\dim M_p(J, A)/G = 2c(A) + 2n - 6 = 2(n+1) + 2n - 6 = 4n - 4$$

grâce au théorème de l'indice (où  $c(A) = \langle c_1(W, J), A \rangle = \langle c_1(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})), A \rangle = n + 1$  et  $6 = \dim G$ ), et donc  $\dim M_p(J, A) \times_G (S^2 \times S^2) = 4n$ .

On montre maintenant que  $e_J$  est de degré 1. Ce degré ne dépend pas du choix de  $J$  générique. Considérons un point  $(x_0, y_0) \in \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ . On sait qu'il y a une unique courbe  $C_0$  de la classe  $A$  et  $J_0$ -holomorphe qui passe par ces deux points: c'est vrai dans  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  et on a le

LEMME 3.2.2. *Si une courbe rationnelle  $J_0$ -holomorphe de la classe  $A$  passe par deux points de  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  elle est contenue dans  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ .*

*Démonstration du lemme.* En effet,  $J_0$  est intégrable au voisinage de  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  et on a des intersections  $> 0$ , de plus l'intersection homologique de  $A$  et  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  vaut  $+1$ , donc une courbe de la classe  $A$  non contenue dans  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  le rencontre en exactement un point.  $\square$

Soit maintenant  $J_n$  une suite de structures presque complexes génériques<sup>4)</sup> avec  $\lim J_n = J_0$  et  $(x_n, y_n)$  une suite tendant vers  $(x_0, y_0)$  et telle que  $(x_n, y_n)$

<sup>4)</sup> Il n'y a aucune raison pour que  $J_0$  soit générique, il n'y a qu'au voisinage de  $C_0$  qu'on peut en dire quelque chose (voir 3.2.3).

soit une valeur régulière de  $e_{J_n}$ . Pour  $n$  assez grand, il y a une et une seule courbe  $C_n$ ,  $J_n$ -holomorphe, passant par  $x_n$  et  $y_n$  et proche de  $C_0$  (voir le lemme 3.2.3). Supposons  $\text{deg} e_{J_n} \neq 1$ . On peut alors trouver, pour chaque  $n$ , une courbe  $C'_n$ ,  $J_n$ -holomorphe, passant par  $x_n$  et  $y_n$  et qui ne peut être proche de  $C_0$ . Le théorème de compacité permet d'en déduire une courbe  $J_0$ -holomorphe  $C'_0 \neq C_0$  passant par  $x_0$  et  $y_0$ , ce qui est absurde.

Donc  $\text{deg} e_J = 1$  pour tout  $J$  générique.

Pour l'instant, on a surtout utilisé qu'un des morceaux était un  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , il faut maintenant utiliser que l'autre est  $T^{2n}$ . En composant  $e_J$  avec le carré d'une application de degré 1 de  $W$  dans  $T^{2n}$ , on obtient une application de degré 1

$$X = M_p(J, A) \times_G (S^2 \times S^2) \rightarrow T^{2n} \times T^{2n}$$

donc  $H^{4n}(X; \mathbf{Z})$  serait engendré par un produit d'éléments de  $H^1(X; \mathbf{Z})$ . Comme  $X$  est un  $S^2 \times S^2$ -fibré sur une variété de dimension  $4n - 4$ , tout son  $H^1$  provient de celle-ci et tous les produits sont déjà nuls en dimension  $4n - 3$ . C'est donc absurde.

La démonstration est terminée, modulo l'existence de  $C_n$  proche de  $C_0$ . Avec les notations de [7, par. 2], c'est une conséquence du

LEMME 3.2.3. *Soit  $f_0: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow W$  le plongement (linéaire) d'image  $C_0$ . Alors  $(f_0, C_0)$  est un point régulier de l'opérateur Fredholm  $P_A$ .*

*Démonstration* (voir [3, 2.1. C<sub>1</sub>]). Soit  $E = f_0^* TW$ , c'est aussi  $f_0^* T\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec sa structure complexe naturelle (puisque  $J_0$  est la structure complexe usuelle au voisinage de  $C_0$ ). On sait que  $dP_A$  s'identifie à

$$\bar{\partial}: \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, E) \rightarrow \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, E) .$$

Comme  $\bar{\partial}(\Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1)) \subset \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1)$ , grâce au lemme du serpent dans

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1) & \rightarrow & \Omega^{0,0}(E) & \rightarrow & \Omega^{0,0}(v) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial} \\ 0 & \rightarrow & \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1) & \rightarrow & \Omega^{0,1}(E) & \rightarrow & \Omega^{0,1}(v) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

où  $v = E/T\mathbf{P}^1$ , on voit que

$$\text{Coker } dP_A \cong \text{Coker } (\bar{\partial}: \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, v) \rightarrow \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, v)) .$$

Comme il s'agit d'une courbe,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(v) \rightarrow \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, v) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, v) \rightarrow 0$$

est une résolution (flasque) du faisceau  $\mathcal{O}(v)$  des sections holomorphes de  $v$  et

$$\text{Coker } \bar{\partial} \cong H^1(\mathbf{P}^1, v) .$$

Maintenant, on sait que

$$v = (n - 1) \mathcal{O}(1)$$

et

$$\begin{aligned} h^1(\mathbf{P}^1, v) &= h^0(\mathbf{P}^1, v^* \otimes K) = (n - 1)h^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{O}(-2)) \\ &= (n - 1)h^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(-3)) = 0 . \end{aligned} \quad \square$$

#### RÉFÉRENCES

- [1] AUDIN, M. Sommes connexes de variétés symplectiques ou presque complexes. *Séminaire de Géométrie*, Montpellier, 1989-90.
- [2] BARTH, W., C. PETERS and A. VAN DE VEN. *Compact complex surfaces*. *Ergebnisse der Mathematik*, Springer, 1984.
- [3] GROMOV, M. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.* 82 (1985), 307-347.
- [4] EHRESMANN, C. Sur les variétés presque complexes. *Proceedings Int. Cong. Math., Cambridge* (1950), 412-419.
- [5] KAROUBI, M. *K-theory, an introduction*. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* 226, Springer, 1978.
- [6] MCDUFF, D. Communication privée, 1986.
- [7] ——— Examples of symplectic structures. *Invent. Math.* 89 (1987), 13-36.
- [8] ——— Rational and ruled symplectic 4-manifolds. Prépublication, 1989.
- [9] ——— Symplectic manifolds with contact type boundaries. Prépublication, 1990.
- [10] MECKERT, C. Forme de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact de dimension impaire. *Ann. Inst. Fourier* 32 (1982), 251-260.
- [11] WEINSTEIN, A. Contact surgery and symplectic handlebodies. Preprint, 1990.
- [12] WU, W.-T. *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*. *Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann, 1952.

(Reçu le 1<sup>er</sup> novembre 1990)

Michèle Audin

Institut de Recherche  
Mathématique Avancée  
Université Louis Pasteur  
7, rue René-Descartes  
F-67084 Strasbourg Cedex (France)

# SEPTIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

17-23 août 1992

- Le Septième Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME-7) aura lieu à l'Université Laval, dans la ville de Québec (Canada), du 17 au 23 août 1992. La deuxième annonce est maintenant disponible à l'adresse suivante:

**Congrès ICME-7 Congress**

**Université Laval**

**Québec (QC) G1K 7P4**

**Téléphone: (418) 656-7592**

**Fax: (418) 656-2000**

**Courrier élect.: ICME-7@VM1.ULaval.CA**

Elle contient des informations générales sur ICME-7, entre autres sur l'inscription et l'hébergement, ainsi qu'un formulaire pour soumettre une communication brève.

- Le Congrès ICME-7 permettra aux participants de s'informer des développements récents en éducation mathématique au plan international et de prendre connaissance d'innovations et de recherches récentes concernant l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux. La composante majeure du programme scientifique est un ensemble de 23 Groupes de travail favorisant chacun l'étude active d'un aspect particulier de l'éducation mathématique dans un contexte international d'actualité. Chaque Groupe de travail se réunira pendant quatre séances de 90 minutes.
- Au programme figure également des conférences plénières, des exposés, des groupes thématiques, des groupes d'étude, des présentations nationales, des communications brèves sous forme d'affiches ou de bandes vidéo ou de logiciels, des projets, des ateliers, des films, de même que des expositions de livres, de logiciels et d'autres matériels didactiques. Au début du Congrès, une demi-journée sera spécialement consacrée à un Mini-congrès sur les calculatrices et les ordinateurs. De plus, un certain nombre d'événements socio-culturels sont prévus au programme.
- Il est recommandé de s'inscrire tôt. Les personnes qui s'inscriront avant le 15 décembre 1991 bénéficieront d'une réduction substantielle. La date limite pour soumettre une proposition de communication brève est le 31 janvier 1992. Les demandes de réservation de chambre seront acceptées jusqu'au 1<sup>er</sup> juillet 1992; il est cependant conseillé de faire des réservations beaucoup plus tôt.
- La troisième annonce sera disponible en avril 1992 et comprendra le programme détaillé du Congrès. Elle sera envoyée aux personnes dont les inscriptions auront été reçues avant le 15 juin 1992. Les participants s'inscrivant après cette date ne recevront le programme que sur les lieux du Congrès.

---

# Publications de l'Enseignement Mathématique

---

## Œuvres scientifiques de Henri LEBESGUE

- Vol. 1. *Introduction. Intégration et dérivation.* 340 pages, 1972.  
Vol. 2. *Intégration et dérivation (suite).* 444 pages, 1972.  
Vol. 3. *Représentation des fonctions.* 406 pages, 1972.  
Vol. 4. *Structure et aire des surfaces. Fonctions harmoniques. Analysis situs. Géométrie différentielle et analytique.* 392 pages, 1973.  
Vol. 5. *Géométrie algébrique et élémentaire. Pédagogie. Analyses et notices.* 432 pages, 1973.  
Prix: 60 Fr. suisses le volume relié, 240 Fr. suisses pour les cinq volumes.
- 

## Œuvres mathématiques de Georges de RHAM

Un volume relié de 752 pages avec un portrait, 1981. Prix: 70 Fr. suisses

Cet ouvrage réunit tous les travaux mathématiques de G. de Rham publiés dans diverses revues ou dans des comptes rendus de congrès et séminaires. Il contient aussi le cours «Harmonic Integrals» donné à l'Institute for Advanced Study de Princeton en 1950, et qui a servi de base au livre «Variétés différentiables».

---

## Masaki KASHIWARA, *Introduction to microlocal analysis*

Monographie de l'Enseignement Mathématique N° 32 (série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale), 38 pages, 1986; 20 Fr. suisses.

These survey lectures explain the microlocal point of view (consideration of the cotangent bundle) for the study of linear differential equations.

---

## Shing Tung YAU, *Nonlinear analysis in geometry*

Monographie de l'Enseignement Mathématique N° 33 (série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale), 56 pages, 1986; 25 Fr. suisses.

These survey lectures deal with the following topics: spectrum of Laplacian and harmonic functions, Yamabe problem related to conformal deformation, minimal surface equations and harmonic maps, Kähler geometry.

---

## V.I. ARNOLD, *Contact geometry and wave propagation*

Monographie de l'Enseignement Mathématique N° 34 (série des Conférences de l'Union Mathématique Internationale), 56 pages, 1989; 27 Fr. suisses.

Survey lectures held at the University of Oxford. *Contents:* Basic definitions. Characteristics. Submanifolds. Legendre fibrations and singularities. Legendre varieties and the obstacle problem.

---

Un escompte de 20% est accordé aux commandes payées d'avance et adressées à

L'Enseignement Mathématique, Case postale 240

CH-1211 Genève 24 (Suisse)

(Compte de chèques postaux 12-12042 - 5)

---