

## 2. Anses presque complexes

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$(3) \quad a_1^2 + \cdots + a_n^2 - b_1^2 - \cdots - b_m^2 = 3(n - m) + 2(n + m + 2) \\ = 5n - m + 4$$

(toujours en entiers impairs) qui a bien sûr comme solutions les

$$(a_1, \dots, a_n, 1, \dots, 1)$$

où  $(a_1, \dots, a_n)$  est solution de (2), mais aussi par exemple pour  $n = 1$  et  $m \geq 2$ :  $(5, 3, 3, 1, \dots, 1)$  et pour  $n = 3$  et  $m \geq 1$ :  $(3, 3, 3, 3, 1, \dots, 1)$ .

## 2. ANSES PRESQUE COMPLEXES

### 2.1. ANSES CLASSIQUES

Il est assez clair que le mal vient du fait que  $S^4$  ne possède pas de structure presque complexe. Essayons donc de remplacer  $S^4$  par une variété presque complexe pas trop compliquée. La chirurgie considérée ci-dessus peut se décrire ainsi:

$$W^* = \overline{W - (S^0 \times B^4)} \cup_{\partial} (B^1 \times S^3) \\ = \overline{W - (S^0 \times B^4)} \cup_{\partial} \overline{S^4 - (S^0 \times B^4)}$$

où le recollement se fait maintenant par un difféomorphisme des bords qui renverse l'orientation.

### 2.2. ANSES PRESQUE COMPLEXES

Cette description se prête à une généralisation: on y remplace  $S^4$  par une variété fermée (c'est-à-dire compacte sans bord) et connexe  $V$ .

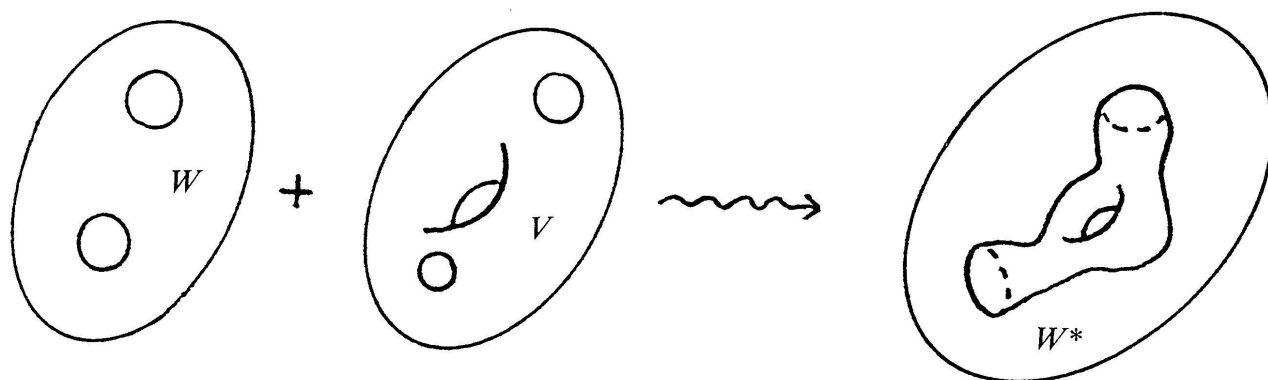


FIGURE 3

On appelle  $\mathcal{V} = \overline{V - (S^0 \times B^4)}$ ,  $\mathcal{W} = \overline{W - (S^0 \times B^4)}$  et  $W^* = \mathcal{W} \cup_{\partial} \mathcal{V}$ , on suppose que  $V$  est simplement connexe pour simplifier. L'homologie de  $\mathcal{V}$  et celle de  $\mathcal{W}$  se calculent facilement à l'aide des longues suites exactes. On en déduit ensuite celle de  $W^*$  par Mayer-Vietoris.

Pour ce qui est de la forme quadratique et de la signature, on trouve des isomorphismes

$$H_2(W) \oplus H_2(V) \leftarrow H_2(\mathcal{W}) \oplus H_2(\mathcal{V}) \rightarrow H_2(W^*).$$

Pour ce qui est de la caractéristique d'Euler, que les deux disques soient pris ou non dans la même composante de  $W$ , on trouve

$$\chi(W^*) = \chi(W) + \chi(V) - 4.$$

Pour construire une structure presque complexe sur  $W^*$ , il suffit donc de trouver  $(x, y) \in H_2(W) \oplus H_2(V)$ , caractéristiques et tels que

$$Q_W(x) + Q_V(y) = 2(\chi(W) + \chi(V) - 4) + 3(\sigma(W) + \sigma(V)).$$

Supposons que  $x$  soit le  $c_1$  d'une structure presque complexe sur  $W$  et considérons  $V$  et  $y$  comme des inconnues. Il faut donc que  $y$  soit caractéristique et que

$$Q_V(y) = 2\chi(V) + 3\sigma(V) - 8.$$

En particulier, alors que  $y$  n'est certainement la première classe de Chern d'aucune structure presque complexe sur  $V$ , il est remarquable qu'il n'y a plus aucune obstruction modulo 8 à l'existence d'un tel  $y$ ... dès lors que  $V$  possède une structure presque complexe.

La «plus petite» solution possible est certainement  $V = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  et  $y$  un générateur de  $H^2(V; \mathbf{Z})$  (rappelons que le  $c_1$  de n'importe quelle structure presque complexe sur  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  est 3 fois le générateur). On voit ainsi  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  jouer encore une fois le rôle de la sphère quand celle-ci refuse sa coopération, ici dans le cadre presque complexe.

*Remarque.* Il y a bien d'autres solutions possibles ne serait-ce que parce qu'il suffit d'éclater des points dans une solution pour en construire d'autres.

La structure presque complexe ainsi obtenue sur la variété «chirurgisée»  $W^*$  se restreint en une structure presque complexe homotope à la structure donnée sur le complémentaire des disques utilisés dans  $W$ , par contre, répétons que sa restriction à l'«anse» n'est la restriction d'aucune structure presque complexe sur  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ .

Appelons *anse presque complexe* la donnée de la variété à bord

$$\mathcal{V} = \overline{\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) - S^0 \times B^4}$$

et de la classe  $y$ , générateur de  $H^2(\mathcal{V}; \mathbf{Z}) = H^2(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$ .

Remarquons que dans le cas d'une variété ouverte ou à bord comme notre anse presque complexe, il est facile de vérifier que pour qu'une classe  $y \in H^2(\mathcal{V}; \mathbf{Z})$  soit la première classe de Chern d'une structure presque complexe, il faut et il suffit que  $\rho_2 y = w_2$ .

*Remarque.* Les solutions de (2) dont nous avons indiqué la construction par récurrence pour  $n$  impair entrent précisément dans ce cadre: on commence par connecter deux copies de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  qu'on connecte par une anse presque complexe, la variété obtenue est  $\#^3 \mathbf{P}^2$ , avec la structure presque complexe déterminée par les entiers (3, 1, 3) (fig. 4). On connecte encore une copie de  $\mathbf{P}^2$  par une anse presque complexe, obtenant ainsi  $\#^5 \mathbf{P}^2$  avec (3, 1, 3, 1, 3) et ainsi de suite.

La construction de  $W^*$  est une manipulation topologique un peu violente, à laquelle il n'est pas étonnant que les structures complexes (intégrables) résistent, de même que les structures symplectiques:

PROPOSITION 2.2.1. *Il n'existe aucune structure complexe (resp. forme symplectique) sur l'anse presque complexe qui se recolle à chaque extrémité à la structure standard de  $\mathbf{C}^2$ .*

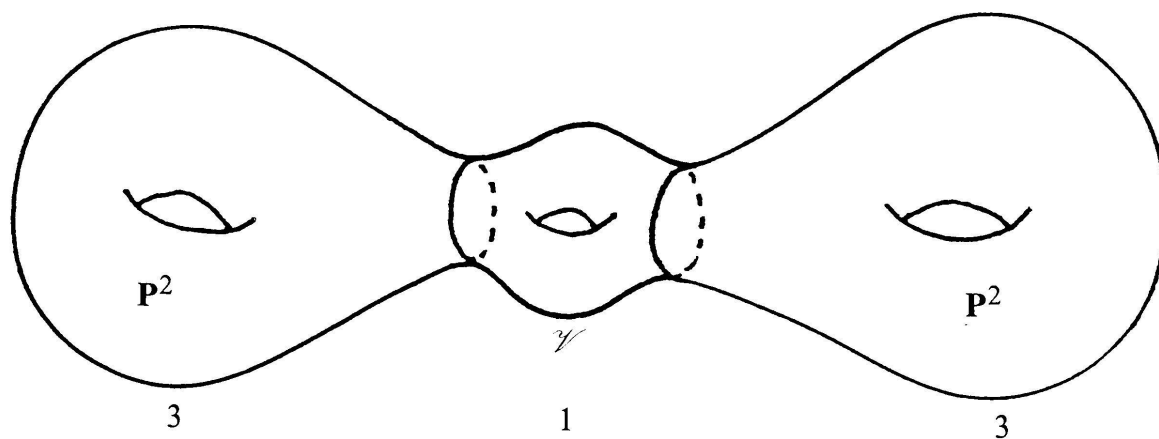


FIGURE 4

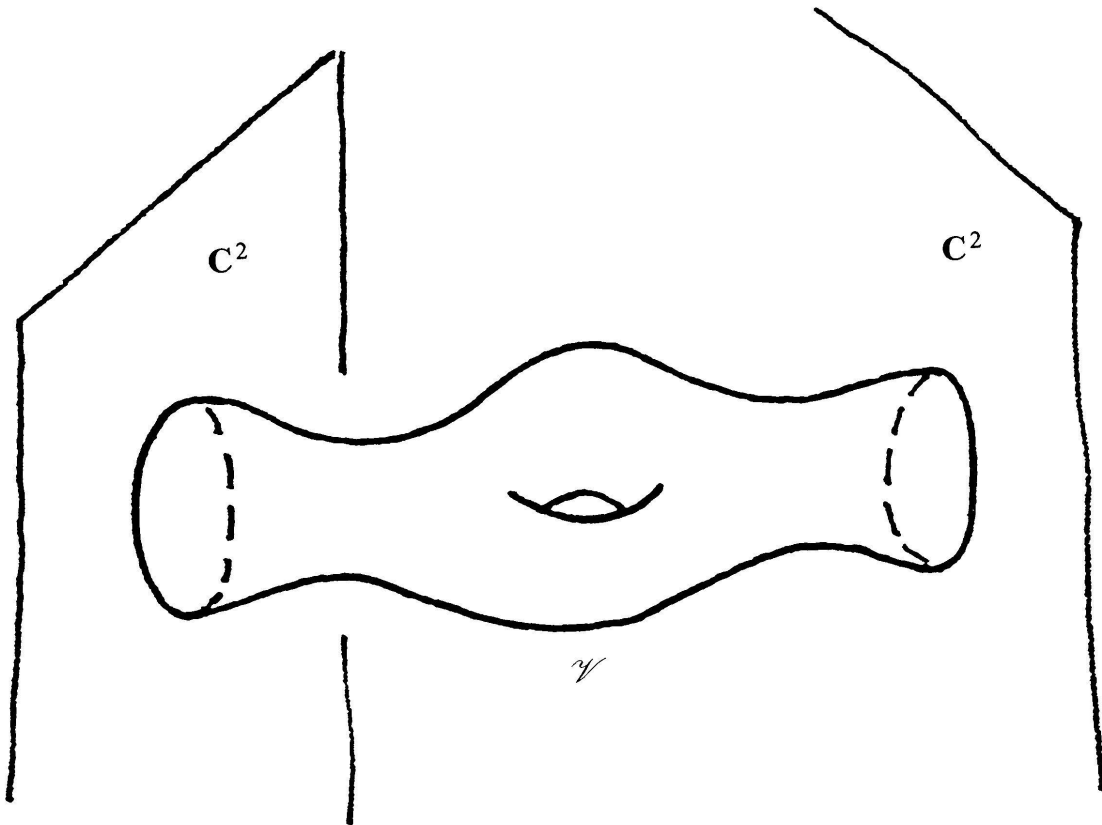


FIGURE 5

*Démonstration.* Sinon, on pourrait recoller cette anse à la structure standard de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  (fig. 5). La variété  $W^*$  obtenue contiendrait alors une courbe rationnelle (un  $\mathbf{P}^1$  standard de  $\mathbf{P}^2$ ) à auto-intersection positive, ce qui est exclu dans les deux cas:  $W^*$  serait minimale (la forme d'intersection est positive) mais n'est ni  $\mathbf{P}^2$  ni un fibré en  $\mathbf{P}^1$  comme on le vérifie aisément par un calcul de caractéristique d'Euler, ce qui contredit [2, V.4.3] dans le cas complexe<sup>3)</sup> et [8] dans le cas symplectique.  $\square$

*Remarque.* En fait, c'est une conséquence simple de l'inégalité de Miyaoka  $c_1^2 \leq 3c_2$  (voir par exemple [2]) que  $\# \mathbf{P}^2$  et plus généralement  $\# \mathbf{P}^2$  pour  $n > 1$  ne possède aucune structure complexe intégrable. En effet  $\# \mathbf{P}^2$  serait nécessairement une surface de type général (voir la classification d'Enriques-Kodaira par exemple dans [2]) avec  $c_1^2 = 5n + 4$  et  $c_2 = n + 2$  d'où

<sup>3)</sup> Pour ne pas allonger démesurément la bibliographie, j'ai renvoyé au livre [2] pour tous les résultats sur les surfaces complexes. On y trouvera les références aux travaux originaux.

$$c_1^2 - 3c_2 = 5n + 4 - 3(n + 2) = 2n - 2 \leq 0$$

ce qui n'est possible que pour  $n = 1$ .

Plus généralement, on peut construire par cette « chirurgie » de nombreuses variétés presque complexes sans structure complexe puisque l'opération augmente  $c_1^2$  de 1 et diminue  $3c_2$  de 2.

### 2.3. ANSES D'INDICE 1

On peut jouer au même jeu avec des chirurgies d'indice supérieur. On trouve toujours une impossibilité à la chirurgie ordinaire, mais une possibilité d'ajouter une anse presque complexe. A titre d'exemple simple, détaillons ici le cas des anses d'indice 1.

On choisit un plongement à fibré normal trivial de  $S^1$  dans  $W$  (resp.  $V$ ). On écrit comme plus haut  $\mathcal{W} = \overline{W - S^1 \times B^3}$ , et  $\mathcal{V} = \overline{V - S^1 \times B^3}$  ( $V$  est la variété inconnue, que l'on suppose simplement connexe). Les mêmes méthodes que ci-dessus fonctionnent pour donner

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \rightarrow H_2 V \rightarrow 0$$

( $H_2 \mathcal{W}$  est somme de  $H_2 V$  et du facteur  $\mathbf{Z}$  engendré par une sphère  $* \times S^2 = \partial(* \times B^3)$  fibre du fibré en sphères normal à  $S^1$ ). Supposons  $W$  simplement connexe, on a de même

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \rightarrow H_2 W \rightarrow 0$$

et Mayer-Vietoris donne

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow H_2 \mathcal{W} \oplus H_2 \mathcal{V} \rightarrow H_2 W^* \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

(les deux sphères sont les mêmes dans  $W^*$ ).

Ainsi  $b_2(W^*) = b_2(W) + b_2(V) + 2$ ,  $\sigma(W^*) = \sigma(W) + \sigma(V)$ : on a rajouté un facteur hyperbolique comme on s'en convainc agréablement en imaginant que  $W = V = S^4$  et donc que  $W^* = S^2 \times S^2$ ; de plus  $\chi(W^*) = \chi(W) + \chi(V)$ .

Si  $x$  est la première classe de Chern de  $W$ , l'équation à résoudre est

$$(4) \quad Q_W(x) + Q_V(y) + 2uv = 2(\chi(W) + \chi(V)) + 3(\sigma(V) + \sigma(W))$$

où  $x$  et  $y$  sont caractéristiques et  $u$  et  $v$  sont pairs.

Cette fois on peut prendre pour  $V$  n'importe quelle variété presque complexe (avec  $y$  le  $c_1$  d'une structure presque complexe) avec  $u$  ou  $v$  nul; on peut aussi choisir  $u = v = 2$  (ce qui correspond à la structure complexe usuelle dans le cas de  $S^2 \times S^2$ )... et  $V$  et  $y$  comme ci-dessus ( $2uv = 8$ ).

Appelons *anse presque complexe d'indice 1* le choix de  $\mathcal{V}$  obtenu à partir de  $V = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  avec la structure complexe usuelle (alors  $uv = 0$ ). On a comme plus haut :

PROPOSITION 2.3.1. *Il n'existe aucune structure complexe intégrable (resp. symplectique) sur l'anse presque complexe d'indice 1 qui se recolle à la structure usuelle de  $\mathbf{C}^2 - S^1 \times B^3$  (où  $S^1 \times B^3$  est un voisinage tubulaire d'un petit cercle standard de  $\mathbf{C}^2$ ).*

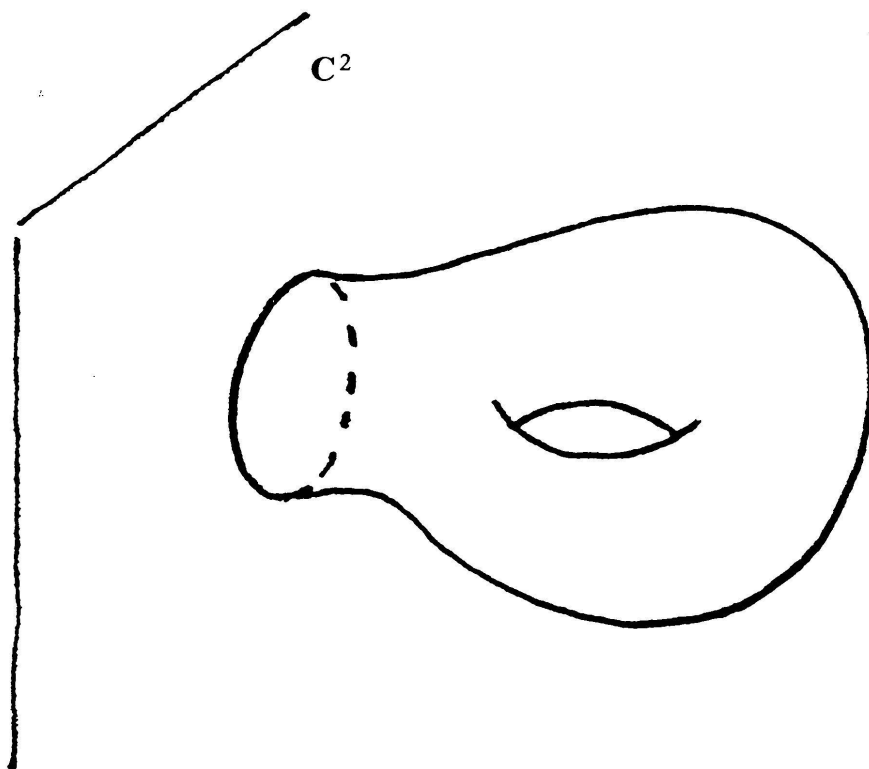


FIGURE 6

*Démonstration.* Supposons qu'une telle structure existe. En plongeant  $\mathbf{C}^2$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  on construit une variété complexe (resp. symplectique) compacte dont la forme d'intersection s'écrit  $a^2 + 2bc + d^2$  et qui contient une courbe rationnelle plongée (une droite projective de l'exemplaire de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  obtenu en complétant le  $\mathbf{C}^2$  standard) d'auto-intersection  $+1$ . La forme  $2bc + d^2$  est équivalente (sur  $\mathbf{Z}$ ) à  $-x^2 + y^2 + z^2$  ce qui fait qu'un modèle minimal de notre surface complexe (variété symplectique) va être une surface avec forme d'intersection  $a^2 + y^2 + z^2$  et une courbe rationnelle à auto-intersection  $+1$  (nous n'avons pas modifié le  $a^2$ ). Ceci est interdit comme plus haut.  $\square$

*Remarque.* La proposition reste vraie si on remplace le  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  ayant permis de construire l'anse  $\mathcal{V}$  par une variété presque complexe  $V$  dont la forme d'intersection est définie positive et de type I (c'est-à-dire prend des valeurs paires et impaires). La démonstration est identique: la forme  $2bc + Q_V(d)$  prend la valeur  $-1$  (si  $d$  est tel que  $Q_V(d) = 2m - 1$ , on prend  $b = 1$  et  $c = -m$ ), elle est donc équivalente (sur  $\mathbf{Z}$ ) à  $-x^2 + Q(y)$  où  $Q$  est une forme quadratique entière de rang  $b_2(V) + 1$  et de signature  $\sigma(V) + 1$  donc définie positive. Un modèle minimal de notre variété aura une courbe rationnelle à auto-intersection positive et une forme d'intersection  $a^2 + Q(y)$  ce qui n'est pas possible pour les mêmes raisons.

### 3. APPENDICE: SOMMES CONNEXES DE VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

#### 3.1. STRUCTURE SUR LES TUBES

Naïvement, on pourrait espérer construire une forme symplectique «somme connexe» en faisant la chirurgie sur des disques contenus dans des ouverts de Darboux et en construisant une forme symplectique sur le tube  $S^{2n-1} \times I$  qui se recolle de chaque côté avec la structure standard de  $\mathbf{R}^{2n}$  - Disque. Les remarques précédentes impliquent qu'une telle forme n'existe certainement pas en dimension  $\neq 2$  ou  $6$ . Les arguments utilisés sont assez grossiers (structure presque complexe au lieu de forme symplectique) et, en réponse à ma question sur la dimension  $6$ , Dusa McDuff [6] m'a fourni un argument plus fin, basé sur les techniques de Gromov [3], que je vais décrire maintenant et qui montre qu'une telle forme n'existe sur aucun tube  $S^{2n-1} \times I$  (pour  $n \geq 2$ ).

#### 3.2. LE CONTRE-EXEMPLE

Il suffit donc d'exhiber deux variétés symplectiques de dimension  $6$ ,  $(V_1, \omega_1)$  et  $(V_2, \omega_2)$  telles que sur  $W = V_1 \# V_2$ , aucune forme symplectique  $\omega$  ne puisse avoir, en restriction à  $V_1$ , une propriété que possède  $\omega_1$ .

PROPOSITION 3.2.1. [3, 2.4.B<sub>3</sub>], [6.9] *Sur  $W = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \# T^{2n}$ , il n'existe aucune forme symplectique  $\omega$  qui admette  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  comme sous-variété symplectique.*

*Remarque.* D'après 1.2 et [9],  $\mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \# T^6$  possède des structures presque complexes.