

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EXEMPLES DE VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES  
**Autor:** Audin, Michèle  
**Anhang:** 3. Appendice: Sommes connexes de variétés symplectiques  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58736>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Remarque.* La proposition reste vraie si on remplace le  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$  ayant permis de construire l'anse  $\mathcal{V}$  par une variété presque complexe  $V$  dont la forme d'intersection est définie positive et de type I (c'est-à-dire prend des valeurs paires et impaires). La démonstration est identique: la forme  $2bc + Q_V(d)$  prend la valeur  $-1$  (si  $d$  est tel que  $Q_V(d) = 2m - 1$ , on prend  $b = 1$  et  $c = -m$ ), elle est donc équivalente (sur  $\mathbf{Z}$ ) à  $-x^2 + Q(y)$  où  $Q$  est une forme quadratique entière de rang  $b_2(V) + 1$  et de signature  $\sigma(V) + 1$  donc définie positive. Un modèle minimal de notre variété aura une courbe rationnelle à auto-intersection positive et une forme d'intersection  $a^2 + Q(y)$  ce qui n'est pas possible pour les mêmes raisons.

### 3. APPENDICE: SOMMES CONNEXES DE VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

#### 3.1. STRUCTURE SUR LES TUBES

Naïvement, on pourrait espérer construire une forme symplectique «somme connexe» en faisant la chirurgie sur des disques contenus dans des ouverts de Darboux et en construisant une forme symplectique sur le tube  $S^{2n-1} \times I$  qui se recolle de chaque côté avec la structure standard de  $\mathbf{R}^{2n}$  - Disque. Les remarques précédentes impliquent qu'une telle forme n'existe certainement pas en dimension  $\neq 2$  ou  $6$ . Les arguments utilisés sont assez grossiers (structure presque complexe au lieu de forme symplectique) et, en réponse à ma question sur la dimension  $6$ , Dusa McDuff [6] m'a fourni un argument plus fin, basé sur les techniques de Gromov [3], que je vais décrire maintenant et qui montre qu'une telle forme n'existe sur aucun tube  $S^{2n-1} \times I$  (pour  $n \geq 2$ ).

#### 3.2. LE CONTRE-EXEMPLE

Il suffit donc d'exhiber deux variétés symplectiques de dimension  $6$ ,  $(V_1, \omega_1)$  et  $(V_2, \omega_2)$  telles que sur  $W = V_1 \# V_2$ , aucune forme symplectique  $\omega$  ne puisse avoir, en restriction à  $V_1$ , une propriété que possède  $\omega_1$ .

PROPOSITION 3.2.1. [3, 2.4.B<sub>3</sub>], [6.9] *Sur  $W = \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) \# T^{2n}$ , il n'existe aucune forme symplectique  $\omega$  qui admette  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  comme sous-variété symplectique.*

*Remarque.* D'après 1.2 et [9],  $\mathbf{P}^3(\mathbf{C}) \# T^6$  possède des structures presque complexes.

*Démonstration.* On va utiliser le fait que l'une des variétés est  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  parce qu'on connaît beaucoup de courbes holomorphes et leurs propriétés dans celle-ci; c'est seulement à la fin de l'argument qu'on utilisera vraiment que l'autre variété est un tore. Supposons donc que  $\omega$  soit une forme symplectique sur  $W$  telle qu'un hyperplan  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  (non touché par la chirurgie) en soit une sous-variété symplectique. Soit  $J_0$  une structure presque complexe adaptée à  $\omega$  et qui soit la structure standard au voisinage de ce  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ . Soit  $A \in H_2(W; \mathbf{Z})$  la classe d'homologie d'une droite  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \subset \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \subset W$ .

Remarquons d'abord que cette classe est simple: elle engendre l'image de  $\pi_2(W)$  et ne peut donc s'écrire comme somme de classes représentées par des courbes holomorphes (pour aucune structure presque complexe adaptée à  $\omega$ ). Ainsi, d'après Gromov, l'espace  $M_p(J, A)/G$  des courbes  $J$ -holomorphes (non paramétrées) de la classe  $A$  est une variété compacte pour  $J$  générique.

On va considérer les courbes de la classe  $A$  qui passent par deux points fixés en utilisant l'application d'évaluation

$$e_J: M_p(J, A) \times_G (S^2 \times S^2) \rightarrow W \times W$$

(où le groupe  $G = PSL_2(\mathbf{C})$  opère par changement de paramétrage). Si  $J$  est générique, on a affaire à deux variétés compactes de dimension  $4n$ . En effet

$$\dim M_p(J, A)/G = 2c(A) + 2n - 6 = 2(n+1) + 2n - 6 = 4n - 4$$

grâce au théorème de l'indice (où  $c(A) = \langle c_1(W, J), A \rangle = \langle c_1(\mathbf{P}^n(\mathbf{C})), A \rangle = n + 1$  et  $6 = \dim G$ ), et donc  $\dim M_p(J, A) \times_G (S^2 \times S^2) = 4n$ .

On montre maintenant que  $e_J$  est de degré 1. Ce degré ne dépend pas du choix de  $J$  générique. Considérons un point  $(x_0, y_0) \in \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ . On sait qu'il y a une unique courbe  $C_0$  de la classe  $A$  et  $J_0$ -holomorphe qui passe par ces deux points: c'est vrai dans  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  et on a le

**LEMME 3.2.2.** *Si une courbe rationnelle  $J_0$ -holomorphe de la classe  $A$  passe par deux points de  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  elle est contenue dans  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$ .*

*Démonstration du lemme.* En effet,  $J_0$  est intégrable au voisinage de  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  et on a des intersections  $> 0$ , de plus l'intersection homologique de  $A$  et  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  vaut  $+1$ , donc une courbe de la classe  $A$  non contenue dans  $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{C})$  le rencontre en exactement un point.  $\square$

Soit maintenant  $J_n$  une suite de structures presque complexes génériques<sup>4)</sup> avec  $\lim J_n = J_0$  et  $(x_n, y_n)$  une suite tendant vers  $(x_0, y_0)$  et telle que  $(x_n, y_n)$

<sup>4)</sup> Il n'y a aucune raison pour que  $J_0$  soit générique, il n'y a qu'au voisinage de  $C_0$  qu'on peut en dire quelque chose (voir 3.2.3).

soit une valeur régulière de  $e_{J_n}$ . Pour  $n$  assez grand, il y a une et une seule courbe  $C_n$ ,  $J_n$ -holomorphe, passant par  $x_n$  et  $y_n$  et proche de  $C_0$  (voir le lemme 3.2.3). Supposons  $\text{deg} e_{J_n} \neq 1$ . On peut alors trouver, pour chaque  $n$ , une courbe  $C'_n$ ,  $J_n$ -holomorphe, passant par  $x_n$  et  $y_n$  et qui ne peut être proche de  $C_0$ . Le théorème de compacité permet d'en déduire une courbe  $J_0$ -holomorphe  $C'_0 \neq C_0$  passant par  $x_0$  et  $y_0$ , ce qui est absurde.

Donc  $\text{deg} e_J = 1$  pour tout  $J$  générique.

Pour l'instant, on a surtout utilisé qu'un des morceaux était un  $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ , il faut maintenant utiliser que l'autre est  $T^{2n}$ . En composant  $e_J$  avec le carré d'une application de degré 1 de  $W$  dans  $T^{2n}$ , on obtient une application de degré 1

$$X = M_p(J, A) \times_G (S^2 \times S^2) \rightarrow T^{2n} \times T^{2n}$$

donc  $H^{4n}(X; \mathbf{Z})$  serait engendré par un produit d'éléments de  $H^1(X; \mathbf{Z})$ . Comme  $X$  est un  $S^2 \times S^2$ -fibré sur une variété de dimension  $4n - 4$ , tout son  $H^1$  provient de celle-ci et tous les produits sont déjà nuls en dimension  $4n - 3$ . C'est donc absurde.

La démonstration est terminée, modulo l'existence de  $C_n$  proche de  $C_0$ . Avec les notations de [7, par. 2], c'est une conséquence du

LEMME 3.2.3. *Soit  $f_0: \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow W$  le plongement (linéaire) d'image  $C_0$ . Alors  $(f_0, C_0)$  est un point régulier de l'opérateur Fredholm  $P_A$ .*

*Démonstration* (voir [3, 2.1. C<sub>1</sub>]). Soit  $E = f_0^* TW$ , c'est aussi  $f_0^* T\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$  avec sa structure complexe naturelle (puisque  $J_0$  est la structure complexe usuelle au voisinage de  $C_0$ ). On sait que  $dP_A$  s'identifie à

$$\bar{\partial}: \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, E) \rightarrow \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, E) .$$

Comme  $\bar{\partial}(\Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1)) \subset \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1)$ , grâce au lemme du serpent dans

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1) & \rightarrow & \Omega^{0,0}(E) & \rightarrow & \Omega^{0,0}(v) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial} & & \downarrow \bar{\partial} \\ 0 & \rightarrow & \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, T\mathbf{P}^1) & \rightarrow & \Omega^{0,1}(E) & \rightarrow & \Omega^{0,1}(v) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

où  $v = E/T\mathbf{P}^1$ , on voit que

$$\text{Coker } dP_A \cong \text{Coker} (\bar{\partial}: \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, v) \rightarrow \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, v)) .$$

Comme il s'agit d'une courbe,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(v) \rightarrow \Omega^{0,0}(\mathbf{P}^1, v) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(\mathbf{P}^1, v) \rightarrow 0$$

est une résolution (flasque) du faisceau  $\mathcal{O}(v)$  des sections holomorphes de  $v$  et

$$\text{Coker } \bar{\partial} \cong H^1(\mathbf{P}^1, v) .$$

Maintenant, on sait que

$$v = (n - 1) \mathcal{O}(1)$$

et

$$\begin{aligned} h^1(\mathbf{P}^1, v) &= h^0(\mathbf{P}^1, v^* \otimes K) = (n - 1)h^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(-1) \otimes \mathcal{O}(-2)) \\ &= (n - 1)h^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(-3)) = 0 . \end{aligned} \quad \square$$

#### RÉFÉRENCES

- [1] AUDIN, M. Sommes connexes de variétés symplectiques ou presque complexes. *Séminaire de Géométrie*, Montpellier, 1989-90.
- [2] BARTH, W., C. PETERS and A. VAN DE VEN. *Compact complex surfaces*. Ergebnisse der Mathematik, Springer, 1984.
- [3] GROMOV, M. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.* 82 (1985), 307-347.
- [4] EHRESMANN, C. Sur les variétés presque complexes. *Proceedings Int. Cong. Math., Cambridge* (1950), 412-419.
- [5] KAROUBI, M. *K-theory, an introduction*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 226, Springer, 1978.
- [6] MCDUFF, D. Communication privée, 1986.
- [7] ——— Examples of symplectic structures. *Invent. Math.* 89 (1987), 13-36.
- [8] ——— Rational and ruled symplectic 4-manifolds. Prépublication, 1989.
- [9] ——— Symplectic manifolds with contact type boundaries. Prépublication, 1990.
- [10] MECKERT, C. Forme de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact de dimension impaire. *Ann. Inst. Fourier* 32 (1982), 251-260.
- [11] WEINSTEIN, A. Contact surgery and symplectic handlebodies. Preprint, 1990.
- [12] WU, W.-T. *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*. Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, 1952.

(Reçu le 1<sup>er</sup> novembre 1990)

Michèle Audin

Institut de Recherche  
Mathématique Avancée  
Université Louis Pasteur  
7, rue René-Descartes  
F-67084 Strasbourg Cedex (France)