

# 3. Die funktion L: W R

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Wir haben in  $\mathbf{R}^S$  nun drei Mengen  $W \supset W_{\text{Koh}} \supset W_{\text{Geo}}$  definiert. Die Menge  $W_{\text{Geo}}$  sitzt als Teilmenge kompliziert in  $W_{\text{Koh}}$ . Wir kennen für  $W_{\text{Geo}}$  keine direkte Beschreibung. Im nächsten Paragraphen definieren wir auf  $W$  eine Funktion  $L$ . Es zeigt sich, dass die Einschränkung von  $L$  auf  $W_{\text{Koh}}$  genau einen kritischen Punkt in  $\overset{\circ}{W}_{\text{Koh}}$  hat. Dieser liegt auch in  $W_{\text{Geo}}$  und das 1-Skelett seiner geometrischen Realisierung entspricht dem Graphen einer Kreispackung.

### 3. DIE FUNKTION $L: W \rightarrow \mathbf{R}$

3.1. Wir definieren für  $\psi \in W$

$$(4) \quad L(\psi) = -2 \sum_{s \in S} \left( \int_0^{\psi(s)/2} \log \tan \vartheta \, d\vartheta \right).$$

Die so definierte Funktion  $L: W \rightarrow \mathbf{R}$  ist auf  $W$  stetig und auf  $\overset{\circ}{W}$  analytisch. Es sei bemerkt, dass sich das Integral

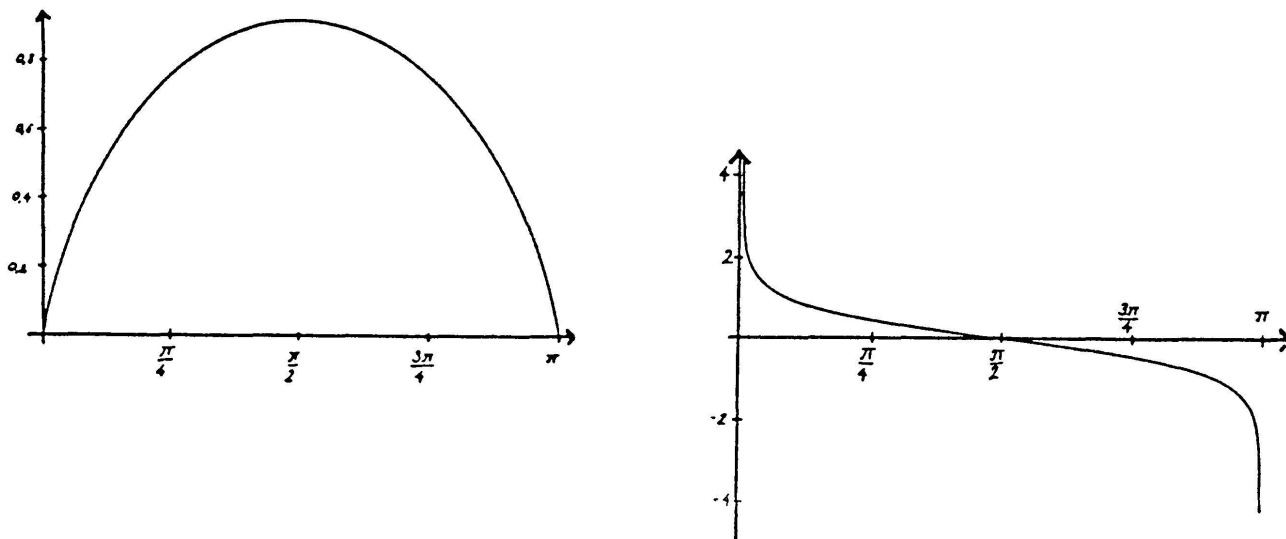
$$I(\alpha) := - \int_0^{\alpha/2} \log \tan \vartheta \, d\vartheta \quad \alpha \in [0, \pi]$$

mit der Lobatchevsky-Funktion  $\mathcal{L}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ausdrücken lässt. Sei  $\mathcal{L}(\delta) :=$

$$- \int_0^{\delta} \log |2 \sin \vartheta| \, d\vartheta, \text{ dann gilt}$$

$$I(\delta) = \mathcal{L}\left(\frac{\delta}{2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right).$$

Mit der Lobatchevsky-Funktion kann man das Volumen hyperbolischer 3-Simplices aus deren Keilwinkel bestimmen. Darum hat auch  $I(\delta)$  und  $L|_{W_{\text{Koh}}}$  eine geometrische Bedeutung im hyperbolischen 3-Raum  $\mathbf{H}^3$ . In 3.2. ordnen wir jedem Winkelsystem  $\psi \in W_{\text{Koh}}$  eine Figur in  $\mathbf{H}^3$  so zu, dass  $L(\psi)$  dem Volumen dieser Figur entspricht. Diese geometrische Interpretation von  $L|_{W_{\text{Koh}}}$  wird zum nackten Beweis des Satzes von Andeev jedoch nicht verwendet.



FIGUR 4

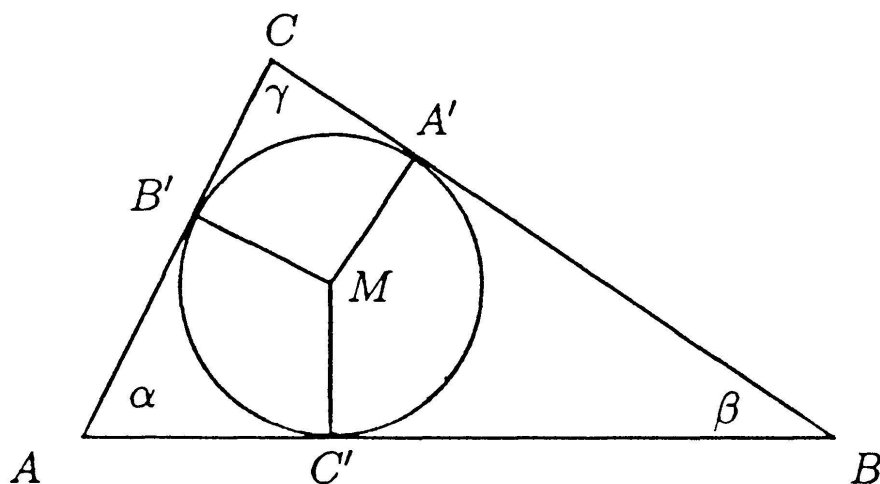
Die Funktionen  $I: [0, \pi] \mapsto \mathbf{R}$  und  $\frac{d}{d\alpha} I(\alpha): (0, \pi) \mapsto \mathbf{R}$

3.2. Sei  $\Omega_\delta$ ,  $\delta \in (0, \pi)$  ein idealer 3-Simplex im hyperbolischen 3-Raum mit den Keilwinkeln  $\delta/2$ ,  $(\pi - \delta)/2$  und  $\pi/2$ . Dann gilt (vgl. hierzu [Mi]):

$$\text{Vol}_{\text{Hyp}}(\Omega_\delta) = \mathcal{L}\left(\frac{\delta}{2}\right) + \mathcal{L}\left(\frac{\pi - \delta}{2}\right) = I(\delta).$$

Für ein euklidisches Dreieck  $d$  mit den Winkeln  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  konstruieren wir in  $\mathbf{H}^3$  eine Figur  $\lambda(d)$  folgendermassen:

Wir wählen für  $\mathbf{H}^3$  das Model  $\mathbf{C} \times \mathbf{R}_+$  und schreiben  $\partial\mathbf{H}^3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ . Seien  $A, B, C$  die Eckpunkte von  $d \subset \mathbf{C}$ ,  $M$  der Mittelpunkt des Inkreises und  $A', B', C'$  die Fusspunkte der Lote von  $M$  auf die Seiten von  $d$  (siehe Figur 5).



FIGUR 5

Zerlegung eines Dreiecks

Die Menge  $\lambda(d)$  ist die konvexe Hülle in  $\mathbf{H}^3$  der Punkte  $A, B, C, M, A', B', C', \infty$ . Sie zerlegt sich in 6 Simplices und zwar je zwei Kopien  $\Omega_\alpha, \Omega_\beta, \Omega_\gamma$ . Somit gilt für  $\psi \in \overset{\circ}{W}_{\text{Koh}}$

$$L(\psi) = \sum_{d \in \Delta} \text{Vol}_{\text{Hyp}}(\lambda(d_\psi)) ,$$

wobei  $d_\psi \subset \mathbf{C}$  eine Realisierung von  $d$  ist, deren Winkel  $\psi$  entsprechen. Für  $\psi \in W$  nicht in  $W_{\text{Koh}}$  kennen wir keine geometrische Bedeutung für  $L(\psi)$ .

3.3. Seien  $\varphi$  und  $\psi$  zwei verschiedene Randpunkte von  $W$ , dann sei

$$[\varphi, \psi] := \{t\psi + (1-t)\varphi\}_{t \in [0,1]} \subset W .$$

Wir nennen  $[\varphi, \psi]$  **maximal**, wenn  $\{t\psi + (1-t)\varphi\}_{t \in \mathbf{R}} \cap W = [\varphi, \psi]$ .

3.4. LEMMA. *Seien  $\varphi$  und  $\psi$  zwei verschiedene Randpunkte von  $W$ , so dass  $[\varphi, \psi]$  maximal ist. Dann bildet die Funktion*

$$t \mapsto \frac{d}{dt} L(t\varphi + (1-t)\psi)$$

das Intervall  $(0, 1)$  homöomorph auf  $\mathbf{R}$  ab.

*Beweis.* Betrachten wir nochmals die Funktion  $I: [0, \pi] \mapsto \mathbf{R}$ . Für  $\alpha \in (0, \pi)$  gilt

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = -\frac{1}{2} \log \left( \tan \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} I(\alpha) = -\frac{1}{2 \sin \alpha} .$$

Sei nun  $\gamma: [0, 1] \mapsto W$  mit  $\gamma(t) := t\varphi + (1-t)\psi$ . Dann gilt für  $t \in (0, 1)$ :

$$(5) \quad \frac{d}{dt} L \circ \gamma = - \sum_{s \in S'} \log \left( \tan \frac{\gamma(t)(s)}{2} \right) ((\varphi - \psi)(s))$$

$$(6) \quad \frac{d^2}{dt^2} L \circ \gamma = - \sum_{s \in S'} \frac{(\varphi - \psi)^2(s)}{\sin(\gamma(t)(s))} < 0 ,$$

wobei  $S' = \{s \in S \mid \varphi(s) \neq \psi(s)\}$  ist. Nach (5) gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{d}{dt} (L \circ \gamma)(t) \right) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 1} \left( \frac{d}{dt} (L \circ \gamma)(t) \right) = -\infty .$$

Somit ist  $\frac{d}{dt} (L \circ \gamma)$  surjektiv und wegen (6) streng monoton.  $\square$

Für  $t = 0$  und  $t = 1$  ist  $\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)$  in  $\mathbf{R}$  nicht definiert. Wegen (7)

definieren wir aber

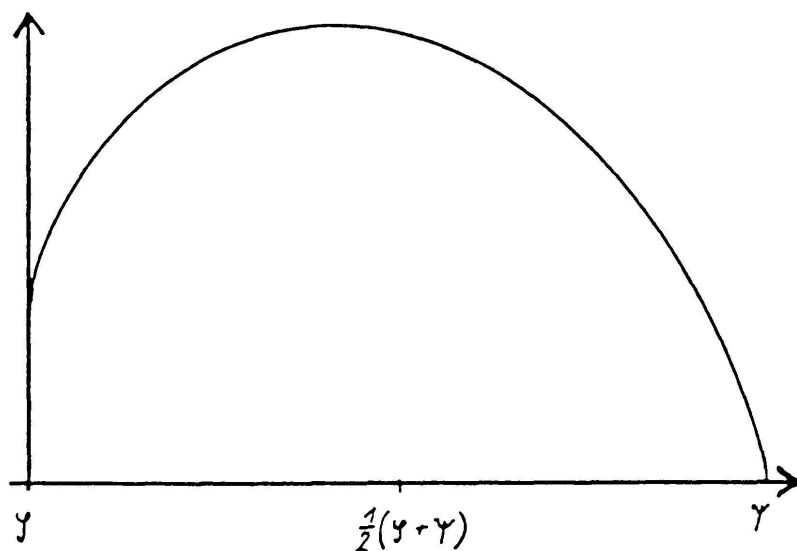
$$\frac{d}{dt}(L \circ \gamma)|_{t=0} = +\infty \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(L \circ \gamma)|_{t=1} = -\infty.$$

Nach Lemma 3.4. ist die Funktion  $L|_{[\varphi, \psi]}: [\varphi, \psi] \mapsto \mathbf{R}$  konkav und nimmt in den Randpunkten  $\varphi$  und  $\psi$  kein Maximum an. Wir erhalten somit:

3.5. PROPOSITION. *Die Funktion  $L: W \mapsto \mathbf{R}$  ist auf  $W$  streng konkav.*

Sei im Folgenden  $L_{\text{Koh}}$  die Einschränkung von  $L$  auf  $W_{\text{Koh}}$ .

3.6. SATZ. *Die Funktion  $L_{\text{Koh}}: W_{\text{Koh}} \rightarrow \mathbf{R}$  nimmt auf der kompakten Menge  $W_{\text{Koh}}$  genau ein Maximum an. Dieses Maximum liegt in  $\overset{\circ}{W}_{\text{Koh}}$  und ist dort der einzige kritische Punkt.*



FIGUR 6

Die Einschränkung von  $L$  auf das Intervall  $[\varphi, \psi]$

*Beweis.* Die Teilmenge  $W_{\text{Koh}}$  von  $W$  ist selbst wieder konvex und die Randpunkte von  $W_{\text{Koh}}$  sind auch Randpunkte von  $W$ . Die Behauptung folgt nun nach Lemma 3.4.  $\square$