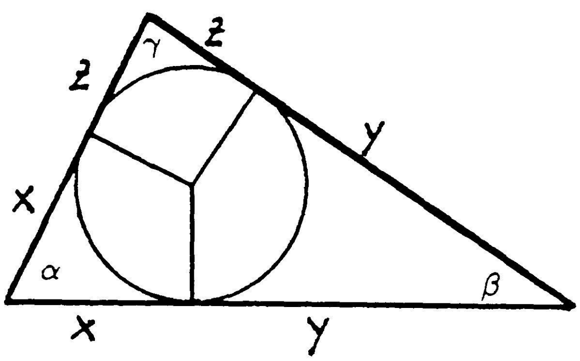
4. IMMERSIERTE KREISPACKUNGEN

4. Immersierte Kreispackungen

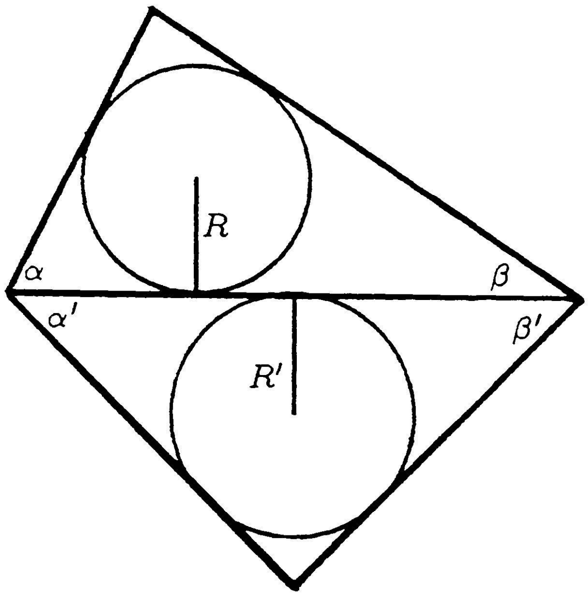
4.1. Satz 3.6. besagt, dass L_{Koh} auf W_{Koh} genau einen kritischen Punkt η annimmt. Da die Vektoren $\{t_k \mid k \in K\}$ den Tangentialraum $T_\eta W_{\mathrm{Koh}}$ aufspannen, ist $\eta \in W_{\mathrm{Koh}}$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0$, $\forall k \in K$. Ist k eine Kante von P und $\eta \in W_{\mathrm{Koh}}$ können wir die Blume um k, d.h. die Vereinigung aller Dreiecke in welchen k enthalten ist, geometrisch realisieren.

Bemerkung. Drei Grössen $a, b, c,$ welche die Dreiecksungleichungen erfüllen, definieren bis auf Kongruenz genau ein euklidisches Dreieck. Sei $x = (-a+b+c)/2, y = (+a-b+c)/2$ und $z = (+a+b-c)/2$. Dann ist $a = y+z, b = x+z, c = y+x$ und wegen den Dreiecksungleichungen sind x, y und z positiv. Umgekehrt definieren drei positive Grössen x, y und z bis auf Kongruenz genau ein euklidisches Dreieck. Der Inkreis eines Dreiecks teilt die Seiten gerade im Verhältnis $x/y, y/z$ und z/x (siehe Figur 7).

Sei zuerst $k \in K_{\mathrm{In}}$ eine innere Kante. Realisieren wir die Blume um k in $\mathbf{E}$, erhalten wir zwei Dreiecke d_η und d'_η mit gemeinsamer Kante $|k|$ und den Winkeln α, β, γ bzw. α', β', γ'. Die Inkreise der Dreiecke d_η und d'_η teilen die Kante $|k|$ im Verhältnis x/y und x'/y'. Sind R und R' die Inkreise der Dreiecke d_η und d'_η so folgt (siehe Figur 8):



Figur 7



Figur 8

Zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante

$$
\begin{aligned}
0 &= (DL_{\mathrm{Koh}})_\eta (t_k) \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} L(\eta + \varepsilon t_k)\,\Big|_{\varepsilon=0}
\end{aligned}
$$

$$= \log \tan \frac{\alpha}{2} - \log \tan \frac{\beta}{2} - \log \tan \frac{\alpha'}{2} + \log \tan \frac{\beta'}{2}$$

$$= \log \frac{R}{x} - \log \frac{R}{y} - \log \frac{R'}{x'} + \log \frac{R'}{y'}$$

$$= - \log \frac{x}{y} + \log \frac{x'}{y'} ,$$

und somit

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'} .$$

Realisieren wir in **E** die beiden an k anliegenden Dreiecke mit gemeinsamer Kante $|k|$, so ist $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k)$ genau dann null, wenn sich die Inkreise der beiden Dreiecke berühren. Somit ist $x = x', y = y'$ und da $R = x \cdot \tan(\alpha/2)$ gilt für die Inkreise R und R'

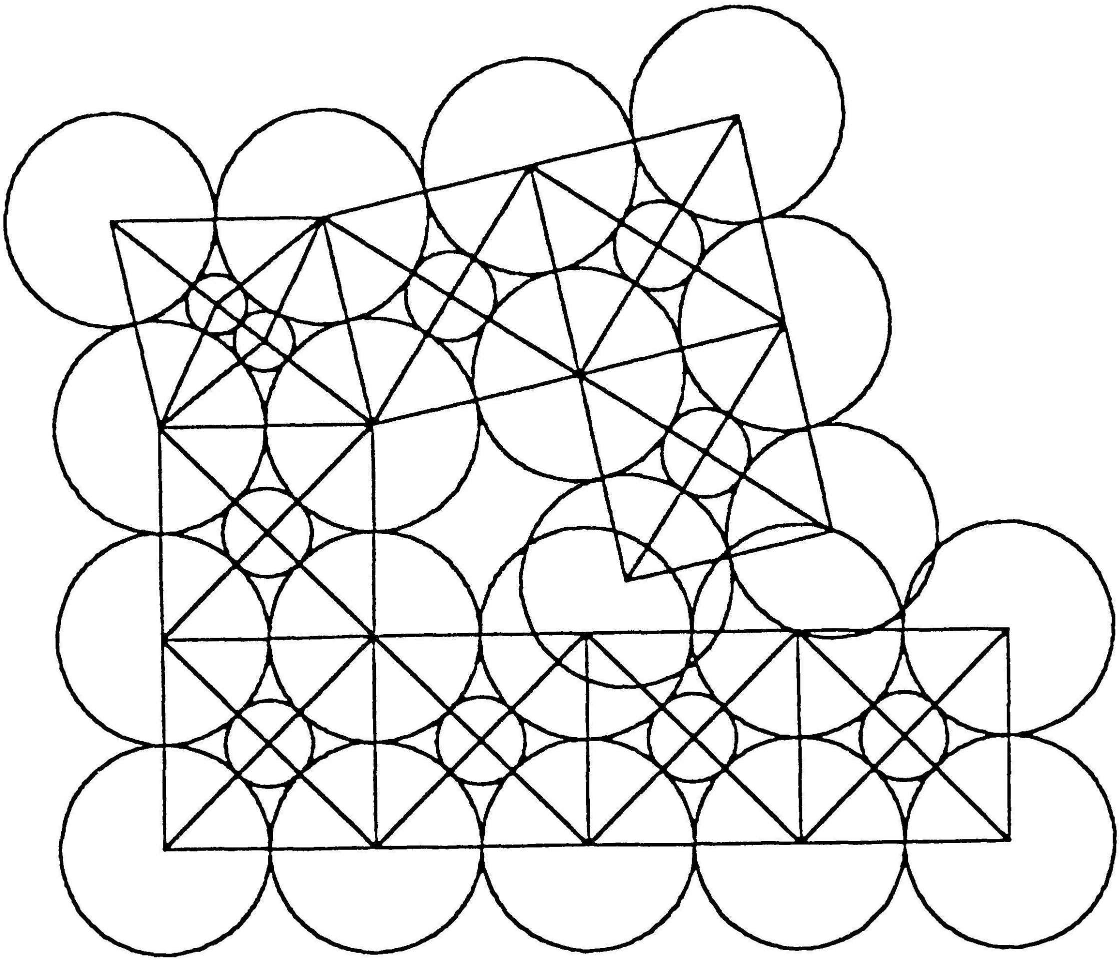
$$\frac{R}{R'} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha'}{2}} .$$

Ist $k \in K_{\mathrm{Rand}}$ eine Randkante, so liegt k nur in einem Dreieck d. Realisieren wir d in **E**, dann teile der Inkreisradius $|k|$ wieder im Verhältnis x/y. Aus $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0$ folgt dann $x/y = 1$. Der Inkreis teilt somit $|k|$ im Verhältnis 1:1.

4.2. Wir nennen $\psi \in W_{\mathrm{Koh}}$ eine *immersierte Kreispackung* (siehe Figur 9) wenn ψ in W_{Geo} liegt und folgende Bedingungen erfüllt:

— Um jeden Eckpunkt e von P_ψ (Bezeichnungen wie in 2.7.) lässt sich ein Kreis C_e schlagen, der alle Kanten, die von e ausgehen, schneidet.

— Sind zwei Ecken e und e' durch eine Kante verbunden, so sollen sich die Kreise C_e und $C_{e'}$ berühren.



FIGUR 9

Beispiel einer immersierten Kreispackung

4.3. LEMMA. *Für* $\eta \in W_{\mathrm{Koh}}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

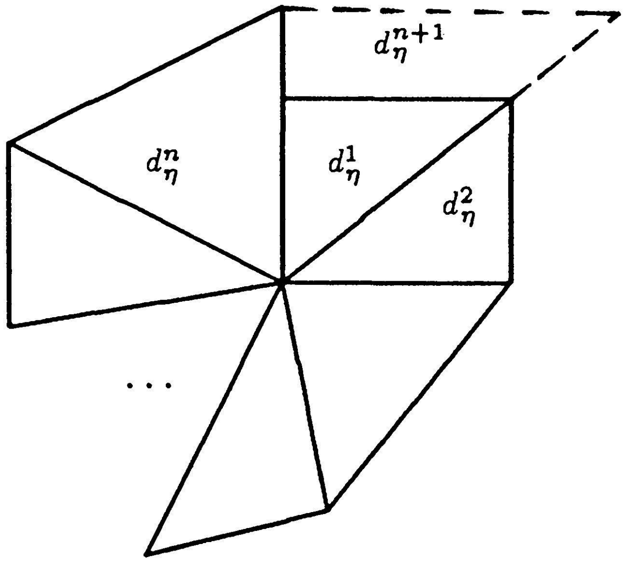
(i) η *ist eine immersierte Kreispackung,*

(ii) $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0, \ \forall k \in K_{\mathrm{In}}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei η eine immersierte Kreispackung. Dann schneiden die Kreise C_e die Seiten der Dreiecke von P_η in den Berührungspunkten der Inkreise. Haben zwei Dreiecke von P_η eine gemeinsame Kante $|k|$, so fallen auf $|k|$ die Berührungspunkte der Inkreise zusammen und es folgt $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_k) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei e ein innerer Eckpunkt und seien $d^1, \ldots, d^n$ die Dreiecke der Blume um e wobei d^i und d^{i+1} die Kante k_i gemeinsam haben. Wir realisieren erst d^1 in **E**. Dann realisieren wir die Dreiecke $d^2, \ldots, d^n$ so, dass d^i_η mit d^{i-1}_η genau die Kante $|k_{i-1}|$ gemeinsam hat.

Sei d_η^{n+1} eine weitere Realisierung von d^1, welche aber mit d_η^n die Kante $|k_n|$ gemeinsam hat. Da die Winkelsumme um jeden Eckpunkt 2π beträgt, haben die Dreiecke d_η^n und d_η^{n+1} keinen inneren Punkt gemeinsam (siehe Figur 10).



FIGUR 10

Die Blume um einen inneren Eckpunkt

Wegen $(DL_{\mathrm{Koh}})_\eta(t_{k_i}) = 0$ berühren sich die Inkreise der Dreiecke d_η^i und d_η^{i+1}. Bezeichnen wir mit R_i den Inkreisradius des Dreiecks d_η^i und mit α_i den Winkel von d_η^i der an die Ecke e stösst, dann folgt

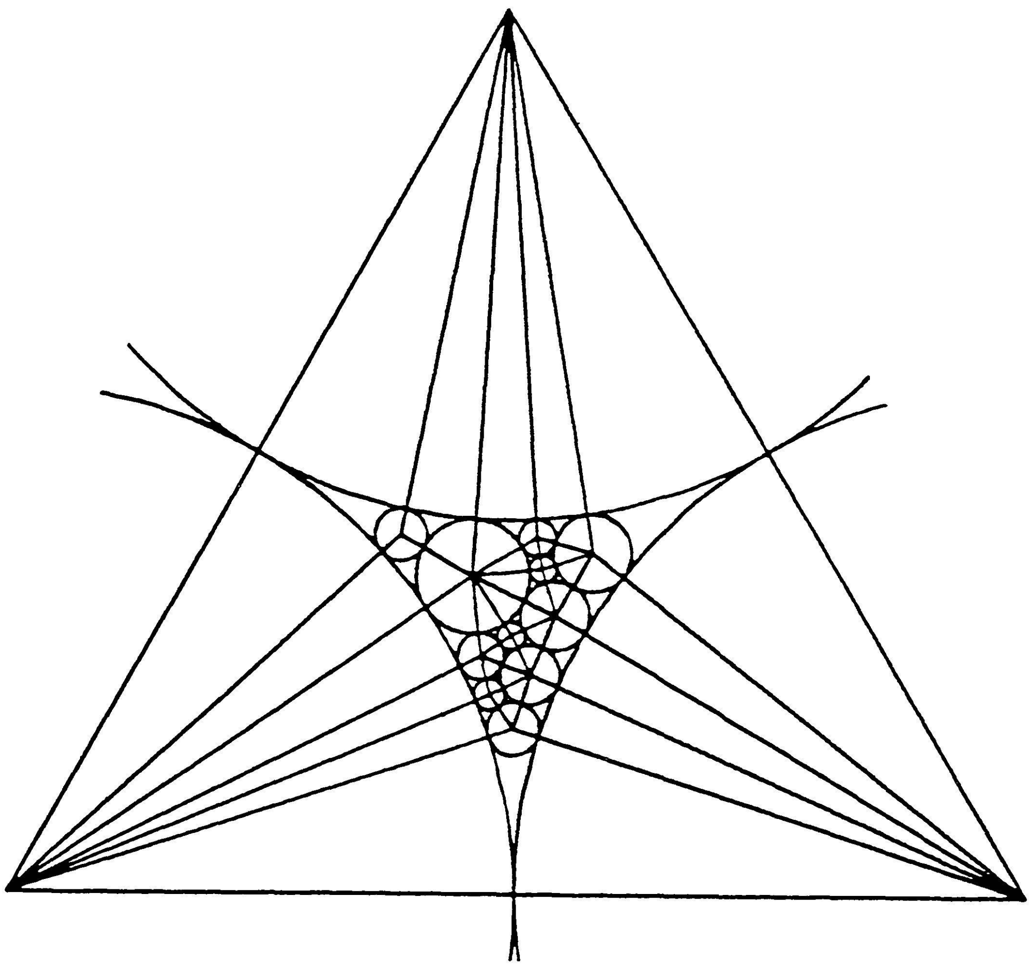
$$\frac{R_1}{R_{n+1}} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_3} \cdots \frac{R_n}{R_{n+1}} = \frac{\tan(\alpha_1/2)}{\tan(\alpha_2/2)} \cdots \frac{\tan(\alpha_n/2)}{\tan(\alpha_1/2)} = 1 .$$

Folglich fallen die Dreiecke d_η^1, d_η^{n+1} zusammen und die Blume um e schliesst sich. Da sich die Blume um jeden inneren Eckpunkt schliesst, ist η immersiert realisierbar. Haben zwei Dreiecke eine gemeinsame Kante, so berühren sich in $P_\eta \subset \mathbf{E}$ ihre Inkreise. Wir können somit um jeden Eckpunkt von P_η einen Kreis schlagen, der die Kanten in den Berührungspunkten der Inkreise schneidet. Diese Kreise erfüllen die Kreispackungseigenschaft 4.2. □

4.4. SATZ. *Für jedes Polyeder P mit $|P|$ homöomorph zur Kreisscheibe existiert genau eine immersierte Kreispackung, bei der alle Randkreise gleich gross sind.*

Beweis. Nimmt L_{Koh} das Maximum auf W_{Koh} in η an, so gilt $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k) = 0 \,\forall k \in K$, nur für η. Aus $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k) = 0$, $\forall k \in K_{\text{In}}$ folgt die Kreispackungseigenschaft und wegen $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k) = 0 \;\forall k \in K_{\text{Rand}}$ sind alle Randkreise gleich gross. □

4.5. BEWEIS DES SATZES VON ANDREEV. Sei T eine Triangulierung der Sphäre S^2 und e_1, e_2, e_3 die Eckpunkte eines Dreiecks von T. Die Gruppe der Möbiustransformationen operiert dreifachtransitiv auf der Sphäre. Mit einer Möbiustransformation und anschliessender stereographischer Projektion können wir e_1, e_2, e_3 auf die Eckpunkte eines gleichseitigen euklidischen Dreiecks so abbilden, dass alle andern Ecken von T im Inneren dieses Dreiecks liegen. Wir erhalten so eine Triangulierung eines gleichseitigen Dreiecks in **E**. Nach Satz 4.4. existiert dann genau eine immersierte Kreispackung, deren Graphen das 1-Skelett einer Triangulierung eines wiederum gleichseitigen Dreieckes ist (alle drei Randkreise haben denselben Radius). Darum ist diese Kreispackung sogar in **E** eingebettet (siehe Figur 11). Transformieren wir auf S^2 zurück erhalten wir eine Kreispackung auf der Sphäre. Die Eindeutigkeit bis auf Möbiustransformation folgt aus der Eindeutigkeit im euklidischen Fall.



FIGUR 11
Kreispackung auf der Sphäre