3. Enoncés des résultats

$$
\begin{aligned}
P''_{11} &= -(2k+2)(2k+1)x_1^{2k} + 2\varepsilon k(2k-1)x_1^{2k-2}x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k} \\
P''_{22} &= \dots = P_{pp} = -2(k+1)x_1^{2k} + 2\varepsilon k x_1^{2k-2}x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k} \\
P''_{p+1,p+1} &= \dots = P_{n-1,n-1} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k x_1^2 x_n^{2k-2} + 2(k+1)x_n^{2k} \\
P''_{nn} &= 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k(2k-1)x_1^2 x_n^{2k-2} + (2k+2)(2k+1)x_n^{2k} \\
P''_{1n} &= P''_{n1} = 4\varepsilon k(x_1^{2k-1}x_n - x_1 x_n^{2k-1}) .
\end{aligned}
$$

Par conséquent, en $(x_1, 0, \dots, 0, x_n)$,

$$\det P'' = (P''_{11}P''_{nn} - (P''_{1n})^2)P''_{22} \dots P''_{n-1,n-1} .$$

Pour ε assez petit on vérifie que $P''_{11}, \dots, P''_{pp}$ sont négatifs et $P''_{p+1,p+1}, \dots, P''_{nn}$ sont positifs pour $(x_1, 0, \dots, 0, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ (cette affirmation est fausse pour $k = 1$, puisque dans ce cas $P''_{11} = -12x_1^2$ s'annule pour $x \neq 0$). Il s'ensuit que P'' a p valeurs propres négatives et q valeurs propres positives si $x \neq 0$. □

3. Enoncés des résultats

(3.1) Théorème. *Supposons $m, n \geqslant 2$, $p = 0, \dots, n$, $q = n - p$. Alors l'ensemble $H^m_{p,q}$ est non vide si, et seulement si l'une des conditions suivantes a lieu:*

a) *m est impair et $p = q = 1$;*

b) *$m = 2$;*

c) *$m = 4$ et $p = q = 1$ ou $p = 0$ ou $q = 0$;*

d) *m est pair supérieur ou égal à 6.*

(3.2) Application. *Pour m pair $\geqslant 6, n \geqslant 2$ et $p = 0, \dots, n$, il existe une hypersurface régulière M de classe C^∞ de $\mathbf{R}^{n+1}$ contenant 0 telle que la courbure de Gauss-Kronecker $K(x)$ de M en x vérifie*

(i) $K(x) \sim |x|^{n(m-2)}$, $x \to 0$.

(ii) *L'hypersurface M a p rayons de courbure principaux négatifs et q rayons de courbure principaux positifs en tout point voisin de 0.*

Il n'existe pas d'hypersurface avec ces propriétés si $m = 4$ et $p \neq 0$ et n.

(3.3) Théorème. *Soit $P \in H^{(m)}_{p,q}$ avec $m \geqslant 2$ et $n = p + q \geqslant 3$. Alors les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de P ont les mêmes* *nombres de Betti que les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de la forme quadratique* $x \mapsto -x_1^2 \ldots - x_p^2 + x_{p+1}^2 \ldots + x_n^2$.

Remarque. La condition $n = p + q \geqslant 3$ est essentielle dans le théorème (3.3). En effet, dans l'exemple (2.1), le sous-niveau $\{P \leqslant 0\}$ a m composantes connexes.

(3.4) COROLLAIRE. *Si* P *appartient à* $H_n^{(m)}$ *avec* $n \geqslant 3$ *et* $m \geqslant 2$, *alors l'ensemble défini par* $P = 0$ *dans l'espace projectif réel est connexe.*

4. PREUVES

En dimension supérieure à 2, la proposition-clé suivante impose de sérieuses restrictions sur les polynômes de $H_{p,q}^{(m)}$. On va l'utiliser à plusieurs reprises dans la suite.

(4.1) PROPOSITION. *Si* $P \in H_n^{(m)}$ *avec* $n \geqslant 3$, *alors l'application* $P' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *est un homéomorphisme et sa restriction à* $\mathbf{R}^n \backslash 0$ *est un difféomorphisme.*

Preuve. Commençons par la deuxième affirmation. Soit $P \in H_n^{(m)}$; d'après (2), l'application $P' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ envoie $\mathbf{R}^n \backslash 0$ dans lui-même. L'hypothèse (1) garantit que P' est un difféomorphisme local de $\mathbf{R}^n \backslash 0$ dans lui-même. Comme P' est homogène, l'application $\phi : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{S}^{n-1}$ donnée par $\phi(x) = P'(x) / |P'(x)|$ est aussi un difféomorphisme local et il suffit de montrer que ϕ est bijective. Or $\phi(\mathbf{S}^{n-1})$ est ouvert et fermé; donc ϕ est surjective. Par suite ϕ est un revêtement fini de $\mathbf{S}^{n-1}$. Puisque $n \geqslant 3$, $\mathbf{S}^{n-1}$ est simplement connexe si bien que ϕ est injective.

Pour vérifier la première affirmation, il suffit de remarquer que l'inverse de $P' \mid (\mathbf{R}^n \backslash 0)$ se prolonge continûment à $\mathbf{R}^n$. $\square$

Avant de commencer la preuve du théorème (3.3), donnons une version du lemme 8.6 p. 191 de [8] bien adaptée à notre situation.

(4.2) LEMME. *Si* $P \in H_{p,q}^{(m)}$ *avec* $m \geqslant 2$ *et* $n = p + q \geqslant 3$ *alors il existe une fonction de Morse* $\tilde{P} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ *avec un seul point critique d'indice* p *telle que:* $|x| \geqslant 1 \Rightarrow \tilde{P}(x) = P(x)$.

Preuve. Soit $\omega \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ tel que $\omega(x) = 1$ si $|x| \leqslant 1/2$, $\omega(x) = 0$ si $|x| \geqslant 1$. Pour $a \in \mathbf{R}^n \backslash 0$, on pose

$$\tilde{P}(x) = P(x) - \omega(x) \langle x \mid a \rangle, \quad x \in \mathbf{R}^n .$$