

3. Enoncés des résultats

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$P''_{11} = - (2k + 2) (2k + 1) x_1^{2k} + 2\varepsilon k (2k - 1) x_1^{2k-2} x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$

$$P''_{22} = \dots = P''_{pp} = - 2(k + 1) x_1^{2k} + 2\varepsilon k x_1^{2k-2} x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$

$$P''_{p+1,p+1} = \dots = P''_{n-1,n-1} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k x_1^2 x_n^{2k-2} + 2(k + 1) x_n^{2k}$$

$$P''_{nn} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k (2k - 1) x_1^2 x_n^{2k-2} + (2k + 2) (2k + 1) x_n^{2k}$$

$$P''_{1n} = P''_{n1} = 4\varepsilon k (x_1^{2k-1} x_n - x_1 x_n^{2k-1}) .$$

Par conséquent, en $(x_1, 0, \dots, 0, x_n)$,

$$\det P'' = (P''_{11} P''_{nn} - (P''_{1n})^2) P''_{22} \dots P''_{n-1,n-1} .$$

Pour ε assez petit on vérifie que $P''_{11}, \dots, P''_{pp}$ sont négatifs et $P''_{p+1,p+1}, \dots, P''_{nn}$ sont positifs pour $(x_1, 0, \dots, 0, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ (cette affirmation est fautive pour $k = 1$, puisque dans ce cas $P''_{11} = -12x_1^2$ s'annule pour $x \neq 0$). Il s'ensuit que P'' a p valeurs propres négatives et q valeurs propres positives si $x \neq 0$. \square

3. ENONCÉS DES RÉSULTATS

(3.1) THÉORÈME. *Supposons $m, n \geq 2$, $p = 0, \dots, n$, $q = n - p$. Alors l'ensemble $H_{p,q}^m$ est non vide si, et seulement si l'une des conditions suivantes a lieu:*

- a) m est impair et $p = q = 1$;
- b) $m = 2$;
- c) $m = 4$ et $p = q = 1$ ou $p = 0$ ou $q = 0$;
- d) m est pair supérieur ou égal à 6.

(3.2) APPLICATION. *Pour m pair ≥ 6 , $n \geq 2$ et $p = 0, \dots, n$, il existe une hypersurface régulière M de classe C^∞ de \mathbf{R}^{n+1} contenant 0 telle que la courbure de Gauss-Kronecker $K(x)$ de M en x vérifie*

$$(i) \quad K(x) \sim |x|^{n(m-2)}, \quad x \rightarrow 0.$$

(ii) *L'hypersurface M a p rayons de courbure principaux négatifs et q rayons de courbure principaux positifs en tout point voisin de 0.*

Il n'existe pas d'hypersurface avec ces propriétés si $m = 4$ et $p \neq 0$ et n .

(3.3) THÉORÈME. *Soit $P \in H_{p,q}^{(m)}$ avec $m \geq 2$ et $n = p + q \geq 3$. Alors les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de P ont les mêmes*

nombres de Betti que les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de la forme quadratique $x \mapsto -x_1^2 \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 \dots + x_n^2$.

Remarque. La condition $n = p + q \geq 3$ est essentielle dans le théorème (3.3). En effet, dans l'exemple (2.1), le sous-niveau $\{P \leq 0\}$ a m composantes connexes.

(3.4) COROLLAIRE. Si P appartient à $H_n^{(m)}$ avec $n \geq 3$ et $m \geq 2$, alors l'ensemble défini par $P = 0$ dans l'espace projectif réel est connexe.

4. PREUVES

En dimension supérieure à 2, la proposition-clé suivante impose de sérieuses restrictions sur les polynômes de $H_{p,q}^{(m)}$. On va l'utiliser à plusieurs reprises dans la suite.

(4.1) PROPOSITION. Si $P \in H_n^{(m)}$ avec $n \geq 3$, alors l'application $P': \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ est un homéomorphisme et sa restriction à $\mathbf{R}^n \setminus 0$ est un difféomorphisme.

Preuve. Commençons par la deuxième affirmation. Soit $P \in H_n^{(m)}$; d'après (2), l'application $P': \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ envoie $\mathbf{R}^n \setminus 0$ dans lui-même. L'hypothèse (1) garantit que P' est un difféomorphisme local de $\mathbf{R}^n \setminus 0$ dans lui-même. Comme P' est homogène, l'application $\phi: \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ donnée par $\phi(x) = P'(x) / |P'(x)|$ est aussi un difféomorphisme local et il suffit de montrer que ϕ est bijective. Or $\phi(\mathbf{S}^{n-1})$ est ouvert et fermé; donc ϕ est surjective. Par suite ϕ est un revêtement fini de \mathbf{S}^{n-1} . Puisque $n \geq 3$, \mathbf{S}^{n-1} est simplement connexe si bien que ϕ est injective.

Pour vérifier la première affirmation, il suffit de remarquer que l'inverse de $P' | (\mathbf{R}^n \setminus 0)$ se prolonge continûment à \mathbf{R}^n . \square

Avant de commencer la preuve du théorème (3.3), donnons une version du lemme 8.6 p. 191 de [8] bien adaptée à notre situation.

(4.2) LEMME. Si $P \in H_{p,q}^{(m)}$ avec $m \geq 2$ et $n = p + q \geq 3$ alors il existe une fonction de Morse $\tilde{P} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ avec un seul point critique d'indice p telle que: $|x| \geq 1 \Rightarrow \tilde{P}(x) = P(x)$.

Preuve. Soit $\omega \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ tel que $\omega(x) = 1$ si $|x| \leq 1/2$, $\omega(x) = 0$ si $|x| \geq 1$. Pour $a \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, on pose

$$\tilde{P}(x) = P(x) - \omega(x) \langle x | a \rangle, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$