$$\frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_1}(1, 0, \ldots, 0, x_n) = \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_1}(1, 0, \ldots, 0) + 4\varepsilon x_n^2 \,,$$

$$\frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_j}(1, 0, \ldots, 0, x_n) = \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_j}(1, 0, \ldots, 0) \,, \qquad 2 \leqslant j \leqslant n-1 \,,$$

$$\frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_n}(1, 0, \ldots, 0, x_n) = 4\varepsilon x_n - 4(1-\varepsilon)x_n^3 \,.$$

Par suite,

$$(Q_\varepsilon)'(1, 0, \ldots, 0, -\sqrt{\varepsilon/(1-\varepsilon)}) = (Q_\varepsilon)'(1, 0, \ldots, 0, +\sqrt{\varepsilon/(1-\varepsilon)}) \,.$$

On est de nouveau en contradiction avec l'injectivité de $(Q_\varepsilon)'$.

d) L'exemple (2.7) montre que $H_{p,q}^{(m)}$ est non vide pour m pair supérieur ou égal à 6. □

Preuve de l'application (3.2). Il suffit de prendre $P \in H_{p,q}^{(m)}$ et M de la forme

$$\{(x, P(x)) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \,.$$

En effet, la courbure de Gauss-Kronecker est un multiple positif du déterminant hessien de P (cf. [10], p. 93).

Réciproquement, si M est une hypersurface régulière de $\mathbf{R}^{n+1}$ avec (i) et (ii), alors M est localement le graphe de $f \colon U \to \mathbf{R}$ avec U ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant 0. On peut supposer $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ sans changer la courbure. Développons f en parties homogènes:

$$f(x) = P(x) + O(|x|^{j+1}) \,, \qquad x \to 0 \,,$$

où P est un polynôme homogène de degré $j \geqslant 2$. On a:

$$K((x, f(x)) = h(x) \det P''(x) + O(|x|^{n(j-1)}) \,, \qquad x \to 0 \,,$$

avec $h(0) > 0$. La condition (i) entraîne $j = m$ et $\det P''(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ (on a utilisé $|(x, f(x))| \sim |x|$). Donc $P \in H_n^{(m)}$ et (ii) donne $P \in H_{p,q}^{(m)}$. D'après le théorème (3.1), ceci n'est pas possible si $m = 4$ et $p \neq 0$ et n. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREATTA, A. Superficie algebriche di S_3 reali e con hessiana priva di punti reali. *Boll. U. Mat. It. 15* (1960), 424-430.

[2] —— Communication personnelle.

[3] FRANKLIN, J.N. *Matrix Theory.* Prentice-Hall, 1968.

[4] GALAFASSI, V.E. Forme reali armoniche. *Instituto Lombardo 90* (1956), 383-412.

[5] HELFFER, B. et J. NOURRIGAT. *Hypoellipticité maximale pour des Opérateurs Polynômes de Champs de Vecteurs.* Progress in Math., Birkhäuser, 1985.

[6] LEWY, H. A property of spherical harmonics. *American Journal of Math. 69* (1938), 555-560.

[7] MAIRE, H.-M. Necessary and sufficient condition for maximal hypoellipticity of $\bar{\partial}_b$. In *Springer Lecture Notes 1324,* Berlin 1988, 178-185.

[8] MAWHIN, J. and M. WILLEM. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems.* Springer, 1989.

[9] SEGRE, B. Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. *Rend. Acc. Lincei 15* (1953), 237-242, 344-399.

[10] THORPE, J.A. *Elementary Topics in Differential Geometry.* Springer, 1979.

(Reçu le 25 juin 1991)

Henri-Michel Maire

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
Case postale 240
CH-1211 Genève 24