

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES  
D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS

**Autor:** Guillou, L. / Marin, A.

**Anhang:** Appendice A Polynôme d'Alexander et forme quadratique d'un  
entrelacs orienté: Formule de Conway et invariant de Robertello

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59492>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## APPENDICE A

 POLYNÔME D'ALEXANDER ET FORME QUADRATIQUE  
 D'UN ENTRELACS ORIENTÉ:

## FORMULE DE CONWAY ET INVARIANT DE ROBERTELLO

Soit  $K$  un entrelacs orienté dans une sphère d'homologie orientée  $M$  et  $F$  une surface de Seifert connexe pour  $K$  (cf. [Rf] p. 118-120 ou [G] p. 24-28). Soit  $i: F \times [-1, 1] \rightarrow M$  un bicollier orienté autour de  $F$  dans  $M$ . La *forme de Seifert* de la surface  $F$  est la forme bilinéaire  $\mathcal{L}$  définie sur  $H_1(F; \mathbf{Z})$  qui associe à deux classes d'homologie représentées par deux courbes  $x$  et  $y$  tracées sur la surface  $F$  le nombre d'enlacement de  $x^+ = i(x, 1)$  et de  $y$ . Une *matrice de Seifert*<sup>1)</sup>  $S$  de  $F$  est une matrice de la forme  $\mathcal{L}$  dans une base de  $H_1(F; \mathbf{Z})$ .

La forme antisymétrique  $I = \mathcal{L} - {}^t\mathcal{L}$  est<sup>2)</sup> la forme d'intersection de la surface  $F$ , et si  $K$  est un nœud elle est unimodulaire car égale à celle de la surface  $F$  recollée avec un disque le long de  $K$ .

La forme symétrique  $q = \mathcal{L} + {}^t\mathcal{L}$  est la *forme quadratique de la surface  $F$* , elle est paire et dans le cas d'un nœud, non dégénérée de discriminant impair car congrue modulo 2 à  $I$ . L'invariant de Arf de la réduction  $q_2$  modulo 2 de  $q/2$  est l'*invariant de Rohlin-Robertello* du nœud  $K$  (cf. [Rb]).

Le *polynôme d'Alexander normalisé*<sup>3)</sup> de  $K$  est  $\Delta_K(t) = \det(t^{1/2}S - t^{-1/2}{}^tS)$ . Dans le cas d'un nœud, le rang de  $H_1(F; \mathbf{Z})$  est pair et on obtient un polynôme<sup>4)</sup> en  $t$  et  $t^{-1}$  qui vérifie  $\Delta_K(1) = 1$  et  $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$ . On en déduit que le polynôme d'Alexander ne dépend pas de l'orientation ambiante (car si l'on renverse celle-ci, la matrice de Seifert se change en sa transposée).

1) Deux surfaces de Seifert d'un même entrelacs sont isotopes après que l'on leur ait rajouté des anses triviales et donc deux matrices de Seifert sont  $S$  équivalentes: congruentes

après un certain nombre de stabilisations  $S \mapsto \begin{bmatrix} S & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  ou  $S \mapsto \begin{bmatrix} S & * & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (cf. [G]).

2)  ${}^t\mathcal{L}$  désigne la transposée de la forme  $\mathcal{L}$ :  ${}^t\mathcal{L}(x, y) = \mathcal{L}(y, x)$ .

3) D'après la note 1 ci-dessus  $\Delta_K(t)$  ne dépend pas du choix de la surface de Seifert  $S$ .

4) Plus généralement si le rang de  $H_1(F; \mathbf{Z})$  est pair (sinon  $t^{1/2}\Delta_K(t)$  est un polynôme en  $t$  et  $t^{-1}$ ).

La variation par changement de croisement du polynôme d'Alexander normalisé est donnée par la formule de Conway:

A.1. LEMME (Formule de Conway). Soient  $K_-, K_0$  et  $K_+$  trois entrelacs orientés qui coïncident hors d'une boule  $B$  et coupent cette boule en deux arcs dénoués disposés suivant les schémas de la figure 12

Alors:

$$\Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2}) \Delta_{K_0}(t).$$

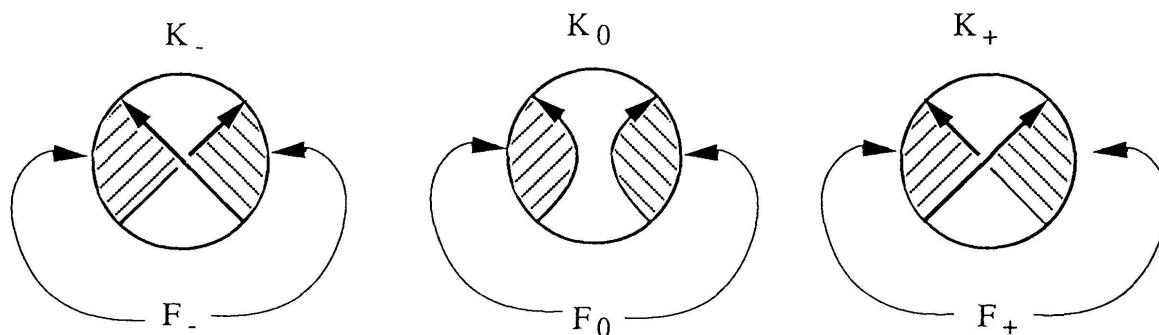


FIGURE 12

Modification d'une surface de Seifert lors d'un changement d'un croisement

*Démonstration de A.1.* Soit  $F_0$  une surface de Seifert connexe pour  $K_0$  qui coupe la boule  $B$  en deux disques disjoints bordés chacun par un arc de  $\partial B$  et une composante de  $B \cap K$ . Définissons  $F_+$  et  $F_-$  des surfaces de Seifert pour  $K_+$  et  $K_-$  qui sont égales à  $F_0$  hors de  $B$  et dans  $B$  sont les bandes que l'on voit sur la figure 12.

Les paires de surfaces  $(F_+, F_0)$  et  $(F_-, F_0)$  sont abstraitement difféomorphes. Soient  $(a_1, \dots, a_n)$  des courbes de  $F_0$  formant une base de  $H_1(F_0; \mathbf{Z})$  et soit  $a_0$  une courbe de  $F_{\pm}$  telle que  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  donne une base de  $H_1(F_{\pm}; \mathbf{Z})$ . Si  $S_-, S_0, S_+$  sont les matrices de Seifert correspondantes dans ces bases on a

$$S_+ = \begin{pmatrix} a & c_1 \dots c_n \\ b_1 & \\ & V_0 \\ b_n & \end{pmatrix}, S_- = S_+ + \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$t^{1/2} S_+ - t^{-1/2} S_- = t^{1/2} S_+ - t^{-1/2} S_+ - \begin{pmatrix} t^{1/2} - t^{-1/2} & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & & & \\ & t^{1/2} S_0 - t^{-1/2} S_0 & & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$

En développant  $\det(t^{1/2}S_+ - t^{-1/2}tS_+)$  et  $\det(t^{1/2}S_- - t^{-1/2}tS_-)$  suivant la première colonne on obtient l'identité cherchée.  $\square$

A.2. LEMME. Soit  $K$  un nœud dans une sphère d'homologie  $M$  alors l'invariant de Rohlin-Robertello de  $K$  est la réduction modulo 2 de  $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$ .

*Démonstration de A.2.* La forme quadratique de la surface  $F$  de matrice  $Q = S + {}^tS$  est paire et de discriminant impair, elle est donc semblable sur les entiers 2-adiques à une somme orthogonale de formes paires de rang 2 (cf. [HNK] p. 4-5):

$$Q = {}^tP \begin{pmatrix} * & & & \\ & \begin{pmatrix} 2a_j & 1 \\ 1 & 2b_j \end{pmatrix} & & \\ & & * & \\ & & & \end{pmatrix} P \quad \text{où la matrice } P \text{ est de déterminant impair .}$$

$$\begin{aligned} \text{Il vient donc: } \Delta_K(-1) &= \det(iQ) = \det(P)^2 \prod_{j=1}^g \det \left( i \begin{pmatrix} 2a_j & 1 \\ 1 & 2b_j \end{pmatrix} \right) \\ &= \det(P)^2 \prod_{j=1}^g (1 - 4a_j b_j) \equiv 1 + 4 \sum_{j=1}^g a_j b_j \text{ modulo } 8 \end{aligned}$$

On a donc la *formule de Levine*:

$$\Delta_K(-1) \equiv 1 + 4 \text{Arf}(q_2) \text{ modulo } 8 .$$

Puisque  $\Delta_K(t)$  est un polynôme en  $t$  et  $t^{-1}$ , la série de Taylor en 1 de  $\Delta_K(t)$  est à coefficients entiers. Elle permet donc de calculer dans les entiers deux-adiques la valeur du polynôme d'Alexander en tout nombre impair et en particulier:

$$\begin{aligned} \Delta_K(-1) &= \Delta_K(1) + \Delta_K'(1) \times (-2) + \frac{1}{2} \Delta_K''(1) \times (-2)^2 \\ &\quad - 8 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta_K^{(n)}(1) \times (-2)^{n-3} , \end{aligned}$$

Par normalisation on a  $\Delta_K(1) = 1$  et  $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$  donc  $\Delta_K'(1) = 0$  d'où

$$\Delta_K(-1) \equiv 1 + 4 \frac{1}{2} \Delta_K''(1) \text{ modulo } 8 .$$

Ce qui par comparaison avec la formule de Levine établit A.2:

$$\text{Arf}(q_2) = \frac{1}{2} \Delta_K''(1) \text{ modulo } 2. \quad \square$$