

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES  
D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS

**Kapitel:** II. Un ouvert de représentations irréductibles DU GROUPE  
FONDAMENTAL D'UNE SURFACE DE GENRE 2

**Autor:** Guillou, L. / Marin, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59492>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

L'élément qui conjugue  $\rho$  à une telle représentation de l'image de  $\sigma$  est unique au signe près et (on peut le calculer explicitement) son image dans  $SO(3)$  dépend différentiablement de  $\rho$ . Donc  $\pi \circ \sigma$  est un difféomorphisme.  $\square$

**B.4. Remarque.** Il est facile de continuer les calculs précédents pour voir que si l'on oriente l'image de  $\sigma$  en transportant l'orientation de  $D \times ]0, \pi[ \subset \mathbf{R}^3$  par  $D\sigma$  alors: d'une part  $D\partial_{\sigma(0, \pi/2)}: T_{\sigma(0, \pi/2)}\text{Im}(\sigma) \rightarrow \mathcal{L} = T_1S^3$  renverse l'orientation et d'autre part si l'orbite par  $SO(3)$  de  $\sigma(0, \pi/2)$  est orientée comme  $SO(3)$  alors  $T_{\sigma(0, \pi/2)}\text{Im}(\sigma) \oplus T_{\sigma(0, \pi/2)}\sigma(0, \pi/2) \cdot SO(3)$  a une orientation opposée à celle de  $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}$  et donc  $D\pi_{\sigma(0, \pi/2)}: T_{\sigma(0, \pi/2)}\text{Im}(\sigma) \rightarrow T_{\hat{\sigma}(0, \pi/2)}\hat{R}(L_2)$  renverse l'orientation. En définitive, on voit que l'ensemble  $\Sigma$  (du lemme B2) a la même orientation qu'il soit vu comme fibre de  $\pi$  ou comme fibre de  $\partial$ . Nous verrons cependant que nous n'avons pas besoin de ce calcul, la différence  $\varepsilon = \pm 1$  (éventuelle) d'orientation intervenant deux fois!

## II. UN OUVERT DE REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DU GROUPE FONDAMENTAL D'UNE SURFACE DE GENRE 2

Soit  $F = F_- \cup F_+$  une surface de genre 2, union de deux exemplaires  $F_-$  et  $F_+$  d'une surface à bord  $F_0$  de genre 1. Choisissons des bases  $(e_1^-, e_2^-)$  de  $\pi_1(F_-)$  et  $(e_1^+, e_2^+)$  de  $\pi_1(F_+)$  de sorte que  $\delta_- = [e_1^-, e_2^-] = [\partial F_-]$  dans  $\pi_1(F_-)$  et  $\delta_+ = [\partial F_+]$  dans  $\pi_1(F_+)$ . Ces bases identifient  $\pi_1(F_-)$  et  $\pi_1(F_+)$  à des groupes libres sur deux générateurs et  $R_- = R(\pi_1(F_-))$  comme  $R_+ = R(\pi_1(F_+))$  à  $S^3 \times S^3$ . On note  $\partial_-: R_- \rightarrow S^3$  et  $\partial_+: R_+ \rightarrow S^3$  les flèches d'évaluation sur  $\delta_-$  et  $\delta_+$  respectivement. On a comme en I des applications  $\sigma_-: D \times ]0, \pi[ \rightarrow R_-$  et  $\sigma_+: D \times ]0, \pi[ \rightarrow R_+$ . On oriente  $R_*$  grâce à la base  $e_1^-, e_2^-, e_1^+, e_2^+$  de  $F_*$ . Alors  $R_* = R_- \times R_+$  et l'espace des représentations de  $\pi_1(F)$  est

$$R = \{(\rho_-, \rho_+) \in R_- \times R_+ \mid (\partial_-(\rho_-))^{-1} = \partial_+(\rho_+)\}.$$

Désignons par  $\mathcal{U}$  l'ouvert de  $\tilde{R}$  formé des représentations  $\rho = (\rho_-, \rho_+)$  de  $R$  telles que  $\partial_+(\rho_+) \neq 1$ .

D'après le lemme B3 dans la classe de conjugaison de tout élément  $\rho$  de  $\mathcal{U}$  il existe un unique élément de la forme  $(\sigma_-(\alpha, t), \rho_+)$ . Ce  $\rho_+$  est dans  $\tilde{R}_+$  et on définit ainsi un difféomorphisme

$$f: \hat{\mathcal{U}} \rightarrow \tilde{R}_+$$

dont l'inverse associe à  $\rho_+ \in \tilde{R}_+$  la classe de conjugaison de  $(\sigma_-(\alpha, t), \rho_+)$  où  $\sigma_-(\alpha, t)$  est choisi de sorte que  $\partial_- \sigma_-(\alpha, t) = (\partial_+ \rho_+)^{-1}$ .

**B.5. LEMME.** *Le difféomorphisme  $f$  préserve ou renverse l'orientation selon que le signe  $\varepsilon$  de la remarque B4 vaut  $+1$  ou  $-1$ .*

*Démonstration de B.5.* On a d'abord des difféomorphismes:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_- \times \tilde{R}_+ &\leftarrow (D \times ]0, \pi[) \times SO(3) \times \tilde{R}_+ \rightarrow (S^3 - \{1\}) \times SO(3) \times \tilde{R}_+ \\ (\sigma_-(\alpha, t) \cdot g, \rho_+) &\leftarrow ((\alpha, t), g, \rho_+) \mapsto (\partial_- \sigma_-(\alpha, t) \cdot g, g, \rho_+) \end{aligned}$$

D'où un difféomorphisme  $\varphi: \tilde{R}_- \times \tilde{R}_+ \rightarrow (S^3 - \{1\}) \times SO(3) \times \tilde{R}_+$  qui préserve ou renverse l'orientation selon que  $\varepsilon$  vaut  $1$  ou  $-1$ . On a aussi un difféomorphisme

$$\psi: S^3 \times SO(3) \times \tilde{R}_+ \rightarrow S^3 \times \tilde{R}_+ \times SO(3), (x, g, \rho_+) \mapsto (x \cdot \partial_+ \rho_+, \rho_+ \cdot g^{-1}, g)$$

qui préserve l'orientation.

Enfin le point  $(\sigma_-(0, \pi/2), \rho_+^0)$  de  $\tilde{R}_- \times \tilde{R}_+$  où  $\partial_+ \rho_+^0 = -1 = \partial_- \sigma_-(0, \pi/2)$  admet un voisinage dans  $R_* \supset \tilde{R}_- \times \tilde{R}_+$  qui est positivement difféomorphe à  $A \times B \times C$  où  $A$  est un voisinage de  $1$  dans  $S^3$ ,  $B$  un voisinage de la classe de  $(\sigma_-(0, \pi/2), \rho_+^0)$  dans  $\hat{\mathcal{U}}$  et  $C$  un voisinage de  $1$  dans  $SO(3)$ . Par composition on obtient un plongement ouvert

$$\begin{array}{ccc} A \times B \times C & \rightarrow & S^3 \times \tilde{R}_+ \times SO(3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \times C & \rightarrow & S^3 \times SO(3) \end{array}$$

faisant commuter le diagramme (car si  $\psi \circ \varphi(\rho_-, \rho_+) = ((\partial_- \rho_-) \cdot (\partial_+ \rho_+), \rho_+ \cdot g^{-1}, g)$  alors

$$\psi \circ \varphi((\rho_-, \rho_+) \cdot g') = ((\partial_- \rho_-) \cdot (\partial_+ \rho_+), \rho_+ \cdot g^{-1}, g \cdot g')$$

et tel que  $1 \times B \times 1$  s'envoie sur  $1 \times O \times 1$  où  $O$  est un voisinage de  $\rho_+^0$  dans  $\tilde{R}_+$ . Donc  $f: \hat{\mathcal{U}} \rightarrow \tilde{R}_+$  préserve ou renverse l'orientation selon que  $\varepsilon$  vaut  $1$  ou  $-1$ .