

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES  
D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS  
**Kapitel:** III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B.I  
**Autor:** Guillou, L. / Marin, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59492>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 17.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B.1

Soit  $F_0$  la surface de Seifert dénouée du nœud  $K$  et  $F = F_- \cup F_+$  le bord d'un voisinage régulier  $W_1$  de  $F_0$  et  $W_2$  le bretzel complémentaire.

Choisissons une base  $(e_1, e_2)$  de  $\pi_1(F_0)$  induisant une base symplectique de  $H_1(F_0)$  et prenons-la pour base de  $\pi_1(W_1)$ . Choisissons aussi une base  $(f_1, f_2)$  de  $H_1(W_2)$  telle que la matrice des nombres d'enlacement  $lk(e_i, f_j)$  soit la matrice identité, alors la matrice de l'application induite par l'inclusion  $H_1(F_+) \rightarrow H_1(W_2)$  est la matrice de Seifert  $S$  de  $F_0$ . Une base symplectique de  $H_1(F_*)$  est  $(e_2^-, e_1^-, e_1^+, e_2^+)$  où  $e_i^\pm$  est la courbe  $e_i$  poussée dans  $F_\pm$ .

CALCUL DE  $(Q_1, Q_2)_{R_*}$ 

On identifie, grâce aux bases précédentes,  $R_*, Q_1, Q_2, R_0, R_-, R_+$  à des produits de sphères  $S^3$ . D'après le corollaire 3.4 le nombre d'intersection  $(Q_1, Q_2)_{R_*}$  est égal à

$$\det(H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_1) \oplus H_1(W_2))$$

où les flèches en homologie sont induites par les inclusions d'espace.

Les matrices de  $H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_1)$  et  $H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_2)$  sont respectivement  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\left( {}^tS \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S \right)$  où  $S$  est la matrice de Seifert de la surface  $F_0$  et  ${}^tS$  sa transposée. Notons  $T$  la matrice  ${}^tS \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors

$$(Q_1, Q_2)_{R_*} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ T & & S & \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & S - {}^tS & & \end{bmatrix} = -\det(S - {}^tS) = -1,$$

car  $S - {}^tS$  est la matrice de la forme d'intersection de  $F_0$  donc de déterminant 1.  $\square$

CALCUL DE  $\langle \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} - \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} = 2 \langle \hat{\delta}, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$ 

Remarquons que  $\hat{\delta} \subset \hat{R}_-$  est inclus dans l'ouvert  $\hat{\mathcal{U}}$  donc d'après la partie II

$$\begin{aligned} 2 \langle \hat{\delta}, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} &= 2(\hat{\delta} \cdot (\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}))_{\hat{R}} = 2\varepsilon(f(\hat{\delta}) \cdot f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}))_{\hat{R}_+} \\ &= 2\varepsilon(\varepsilon\Sigma \cdot f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}))_{\hat{R}_+} = -2 \deg(\pi: f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}) \rightarrow \hat{R}_+). \end{aligned}$$

Or on a un morphisme de  $SO(3)$  fibrés

$$\begin{array}{ccc} Q_2 \cap \mathcal{Q} & \xrightarrow{i_+ |_{Q_2 \cap \mathcal{Q}}} & \tilde{R}_+ \\ \sigma \uparrow \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{Q}} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \hat{R}_+ \end{array}$$

où  $i_+ : Q_2 \rightarrow R_+$  est induit par l'inclusion  $F_+ \rightarrow W_1$  et  $\bar{\pi}$  est défini par ce diagramme.

Donc

$$\deg(\bar{\pi}) = \deg(i_+ |_{Q_2 \cap \mathcal{Q}}) = \deg(i_+) = \deg(H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_2)) = \det(S)$$

où la troisième égalité a lieu d'après le corollaire 3.4.

$$\text{Donc } \langle \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} - \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} = -2 \det(S).$$

Comme  $g = 2$  il vient bien:

$$\begin{aligned} \lambda'(K) &= \frac{1}{2} (-1)^g \frac{\langle \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} - \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}}{(Q_1, Q_2)_{R_*}} = \frac{1}{2} \frac{-2 \det(S)}{-1} \\ &= \det(S). \quad \square \end{aligned}$$