III. Démonstration du théorème B.1

Soit F_0 la surface de Seifert dénouée du nœud K et $F = F_- \cup F_+$ le bord d'un voisinage régulier W_1 de F_0 et W_2 le bretzel complémentaire.

Choisissons une base (e_1, e_2) de $\pi_1(F_0)$ induisant une base symplectique de $H_1(F_0)$ et prenons-la pour base de $\pi_1(W_1)$. Choisissons aussi une base (f_1, f_2) de $H_1(W_2)$ telle que la matrice des nombres d'enlacement $lk(e_i, f_j)$ soit la matrice identité, alors la matrice de l'application induite par l'inclusion $H_1(F_+) \to H_1(W_2)$ est la matrice de Seifert S de F_0. Une base symplectique de $H_1(F_*)$ est $(e_2^-, e_1^-, e_1^+, e_2^+)$ où $e_i^{\pm}$ est la courbe e_i poussée dans $F_\pm$.

Calcul de $(Q_1, Q_2)_{R_*}$

On identifie, grâce aux bases précédentes, $R_*, Q_1, Q_2, R_0, R_-, R_+$ à des produits de sphères S^3. D'après le corollaire 3.4 le nombre d'intersection $(Q_1, Q_2)_{R_*}$ est égal à

$$\det(H_1(F_*) \to H_1(W_1) \oplus H_1(W_2))$$

où les flèches en homologie sont induites par les inclusions d'espace.

Les matrices de $H_1(F_*) \to H_1(W_1)$ et $H_1(F_*) \to H_1(W_2)$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\left({}^tS . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; S \right)$ où S est la matrice de Seifert de la surface F_0 et ${}^tS$ sa transposée. Notons T la matrice ${}^tS . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

$$(Q_1, Q_2)_{R_*} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{T} & \multicolumn{2}{c}{S} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{0} & \multicolumn{2}{c}{S - {}^tS} \end{bmatrix} = -\det(S - {}^tS) = -1 ,$$

car $S - {}^tS$ est la matrice de la forme d'intersection de F_0 donc de déterminant 1. □

Calcul de $< \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} - < \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} = 2 < \hat{\delta}, \hat{Q}_2 >_{\hat{R}}$

Remarquons que $\hat{\delta} \subset \hat{R}_-$ est inclus dans l'ouvert $\hat{\mathscr{U}}$ donc d'après la partie II

$$\begin{aligned} 2 < \hat{\delta}, \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} &= 2(\hat{\delta} . (\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathscr{U}}))_{\hat{R}} = 2\varepsilon(f(\hat{\delta}) . f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathscr{U}}))_{\tilde{R}_+} \\ &= 2\varepsilon(\varepsilon\Sigma . f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathscr{U}})_{\tilde{R}_+} = -2\deg(\pi : f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathscr{U}}) \to \hat{R}_+) . \end{aligned}$$

Or on a un morphisme de $SO(3)$ fibrés

$$\begin{array}{ccc} Q_2 \cap \mathcal{U} & \xrightarrow{i+|Q_2 \cap \mathcal{U}} & \tilde{R}_+ \\ \sigma \uparrow \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \hat{R}_+ \end{array}$$

où $i_+ : Q_2 \to R_+$ est induit par l'inclusion $F_+ \to W_1$ et $\bar{\pi}$ est défini par ce diagramme.

Donc

$$\deg(\bar{\pi}) = \deg(i_{+|Q_2 \cap \mathcal{U}}) = \deg(i_+) = \deg(H_1(F_*) \to H_1(W_2)) = \det(S)$$

où la troisième égalité a lieu d'après le corollaire 3.4.

Donc $< \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} - < \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} = -2\det(S)$.

Comme $g = 2$ il vient bien:

$$\lambda'(K) = \frac{1}{2}(-1)^g \frac{< \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 >_{\hat{R}} - < \hat{Q}_1 . \hat{Q}_2 >_{\hat{R}}}{(Q_1, Q_2)_{R_*}} = \frac{1}{2} \frac{-2\det(S)}{-1}$$

$$= \det(S). \quad \square$$