§1. Présentation des espaces et énoncé du théorème

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **11.08.2024**

lier une approche du calcul de la caractéristique d'Euler de $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$. D'autre part, K. Walker, dans [W], a défini, pour toute sphère d'homologie entière (et même rationnelle!), une structure complexe sur l'espace tangent $T\hat{R}$ pour laquelle $T\hat{Q}_1$ et $T\hat{Q}_2$ sont totalement réels, ceci permet de justifier l'intervention de la caractéristique d'Euler de chaque composante connexe de $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ dans l'expression de l'invariant de Casson de Σ; il pourrait être intéressant de comprendre pourquoi les caractéristiques d'Euler de toutes les composantes apparaisent avec le même signe...

Remarque. Le calcul effectué ci-dessous et la formule de chirurgie de Casson 1.3.3 suffisent pour calculer l'invariant de Casson de toutes les sphères d'homologie entière fibrées de Seifert (voir [FMS] et [NW]). En fait, la généralisation par K. Walker de l'invariant de Casson et de la formule de chirurgie I.3.3 ([W]) permettent un calcul beaucoup plus simple de ce nouvel invariant généralisé pour toutes les sphères d'homologie rationnelle fibrées de Seifert (voir [L]).

Je remercie M. Boileau, qui m'a décrit le scindement de Heegaard du paragraphe 2, L. Guillou, A. Marin, qui m'a suggéré le calcul du paragraphe 3.A, et P. Vogel.

§ 1. PRÉSENTATION DES ESPACES ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME

Notations. Dans cet appendice, a_1, a_2 et a_3 désigneront trois entiers positifs deux à deux premiers entre eux.

On note $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ la sphère de Brieskorn qui admet les deux présentations de chirurgie équivalentes (voir [Rf] chapitre 9 § G):

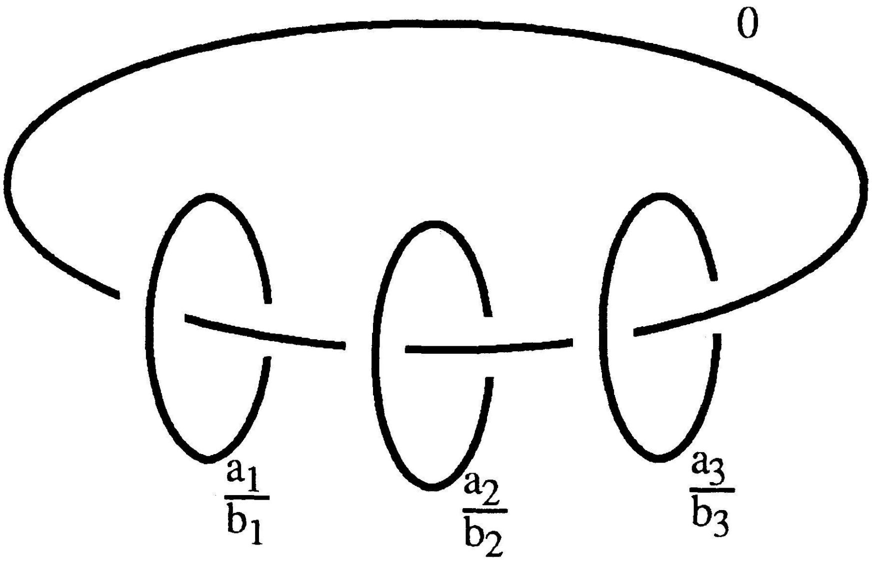

FIGURE 1

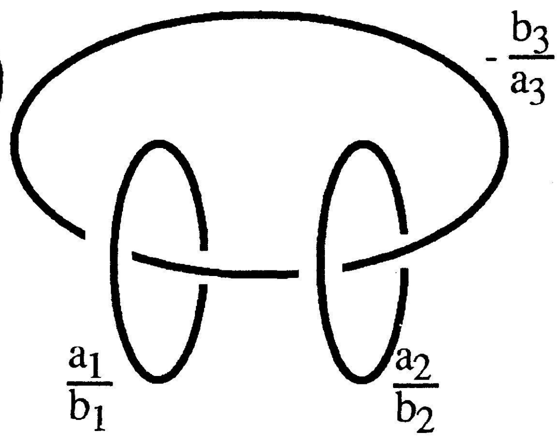

FIGURE 2

où b_1, b_2 et b_3 sont trois entiers qui vérifient

$$(E): b_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 = 1 .$$

Remarque. On vérifie aisément que la variété ainsi présentée est indépendante du choix du triplet d'entiers (b_1, b_2, b_3) qui vérifie (E) (on peut, par exemple, choisir arbitrairement, b_1 parmi les inverses modulo a_1 de $a_2 a_3$, et b_2 parmi les inverses modulo a_2 de $a_1 a_3$, b_3 est alors l'unique inverse modulo a_3 de $a_1 a_2$ tel que (E) soit vérifiée.)

Les fibrés de Seifert à trois fibres exceptionnelles, sphères d'homologie entière, s'écrivent tous sous la forme $\pm \Sigma(a_1, a_2, a_3)$ avec trois entiers a_1, a_2, a_3 premiers entre eux (voir [Sf]). La relation $\lambda(-M) = -\lambda(M)$ nous permet de ne calculer que l'invariant de Casson de $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$.

Si on note $\tau(a_1, a_2, a_3)$ le nombre de points à coordonnées entières intérieurs au tétraèdre de $\mathbf{R}^3$, $T(a_1, a_2, a_3)$, de sommets $(0, 0, 0)$, $(0, a_2, a_3)$, $(a_1, 0, a_3)$ et $(a_1, a_2, 0)$, on a le résultat:

C.1. THÉORÈME. *L'invariant de Casson de* $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ *est égal à* $-\left(\frac{1}{8}\right)\tau(a_1, a_2, a_3)$.

La fonction $\tau(.,.,.)$ est l'opposée de la fonction $t(.,.,.)$ dite de Brieskorn décrite dans [HZ], on peut l'exprimer à l'aide des formules qui suivent:

C.2.
$$\tau(a_1, a_2, a_3) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^k \# \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3 \cap]0, a_1[\times]0, a_2[\times]0, a_3[\mid (k-1) < \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} < k\}$$

(F. Hirzebruch et D. Zagier expriment la fonction de Brieskorn $t(a_1, a_2, a_3)$ sous (l'opposée de) cette forme dans [HZ].)

C.3.
$$\tau(a_1, a_2, a_3) = 4[s(a_1 a_2, a_3) + s(a_3 a_1, a_2) + s(a_2 a_3, a_1)] + \frac{a_1 a_2 a_3}{3}\left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2}\right) - \frac{1}{3 a_1 a_2 a_3} + 1$$

où s désigne la somme de Dedekind:

$$s(q, p) = \sum_{i=1}^{|p|} \left(\left(\frac{i}{p}\right)\right)\left(\left(\frac{qi}{p}\right)\right) \text{ pour } p, q \in \mathbf{Z} \text{ avec } ((x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbf{Z} \\ x - E(x) - \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $E(x)$ est la partie entière de x.