

## §2. Scindement de Heegaard de $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§2. SCINDEMENT DE HEEGAARD DE  $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ 

## 2.A. DESCRIPTION GÉOMÉTRIQUE

On considère la présentation de chirurgie de  $\Sigma = \Sigma(a_1, a_2, a_3)$  indiquée par la figure 2:

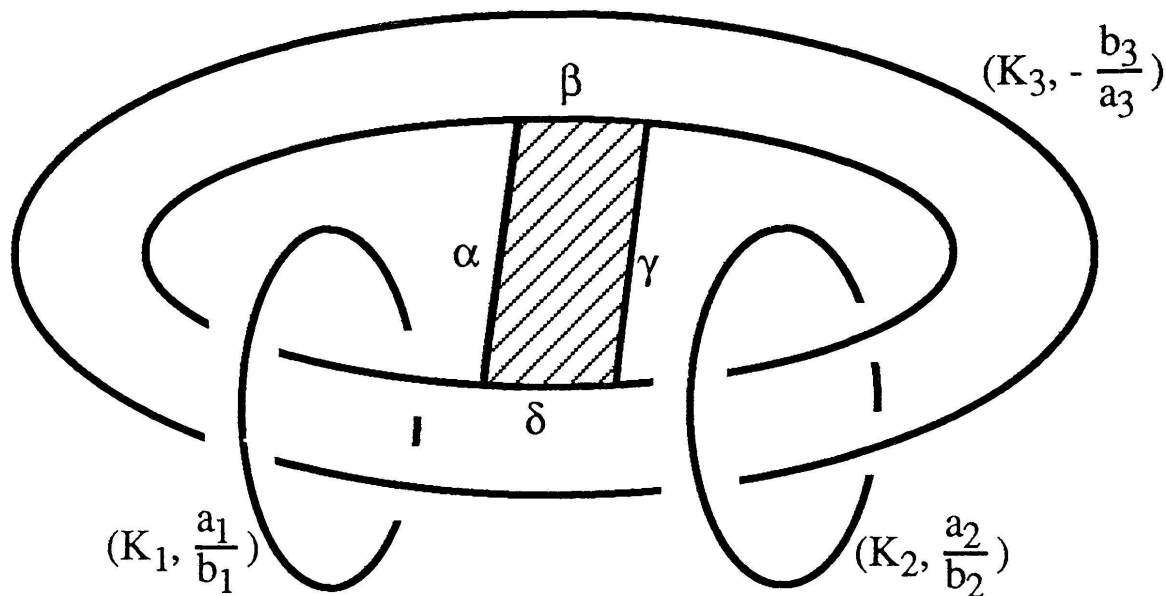


FIGURE 3

*Notations.* Considérons la figure 3. On note  $K_1, K_2, K_3$  les composantes de l'entrelacs de la figure 2.

On décompose le méridien de  $K_3$  en  $I \amalg I'$  où  $I$  et  $I'$  sont des intervalles d'intérieurs disjoints.

$\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont les arêtes du carré hachuré  $C$ . (Situé dans le plan de la figure 3:  $\alpha$  et  $\gamma$  sont des intervalles sur les méridiens de  $K_1$  et  $K_2$  respectivement et  $\beta$  et  $\delta$  des intervalles sur le parallèle planaire à  $K_3$ .)

Pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $T_i$  désigne le tore plein recollé sur le bord du voisinage tubulaire de  $K_i$  lors de la chirurgie prescrite par le diagramme.

Soit  $W_1$  et  $W_2$  les deux corps en anses suivants:

$$W_1 = (T_1 \amalg T_2) \cup_{I \times (\alpha \amalg \gamma)} I \times C, \quad W_2 = T_3 \cup_{I' \times (\beta \amalg \delta)} I' \times C$$

et  $F$  le bord commun à  $W_1$  et à  $W_2$  (voir fig. 4):  $W_1 \cup_F W_2$  est un scindement de Heegaard de  $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ .

*Remarque.* Si on utilise la terminologie de Seifert, le méridien de  $K_3$  est une fibre ordinaire, les tores  $T_i$  sont des voisinages tubulaires des fibres

exceptionnelles et le scindement de Heegaard est réalisé en prenant pour  $W_1$ , une somme connexe le long des bords des voisinages de deux fibres exceptionnelles et pour  $W_2$  l'adhérence du complémentaire de  $W_1$ .

## 2.B. DESCRIPTION DES GROUPES FONDAMENTAUX ASSOCIÉS

$\pi_1(F_*)$  est le groupe libre à quatre générateurs  $\mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2$  décrits par la figure 4. Le bord orienté  $\delta$  de  $F_*$  s'écrit <sup>1)</sup>  $[\lambda_1^{-1}, \mu_1] [\mu_2^{-1}, \lambda_2^{-1}]$  dans cette base de  $\pi_1(F_*)$ . On en déduit la présentation de  $\pi_1(F)$  par générateurs et relations:  $\pi_1(F) = \langle \mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2 \mid \delta \rangle$ .

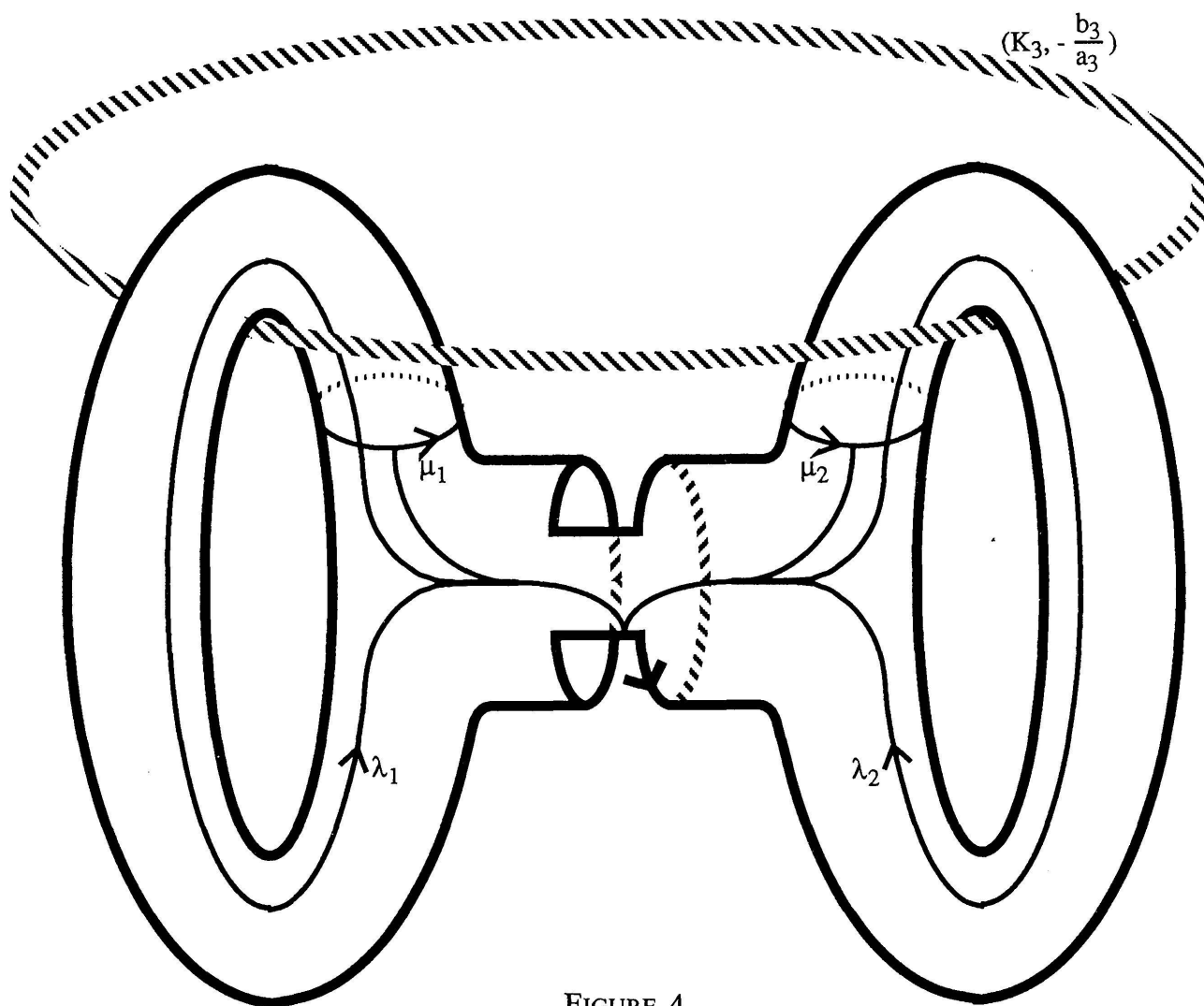


FIGURE 4

$F_*$  plongée dans  $S^3$  et les générateurs de  $\pi_1(F_*)$

### Conventions

$i(, )$  désigne la forme d'intersection sur  $H_1(F)$ ; un élément de  $\pi_1(F)$  et son image dans  $H_1(F)$  par l'homomorphisme d'Hurewicz sont notés de la même manière, leur nature est précisée par le contexte.

<sup>1)</sup> Attention: les lacets sont composés dans l'ordre opposé à l'ordre usuel et  $[a, b]$  désigne le commutateur  $a^{-1}b^{-1}ab$  (cf. les conventions avant 3.5).

Les deux éléments  $j_1$  et  $j_2$  de  $\pi_1(W_1)$  représentés par des lacets de  $F$  respectivement homotopes aux âmes de  $T_1$  et de  $T_2$  et orientés de sorte que  $i(a_1\mu_1 + b_1\lambda_1, j_1)$  et  $i(a_2\mu_2 + b_2\lambda_2, j_2)$  valent 1, forment une base du groupe libre  $\pi_1(W_1)$ .

Soit  $\lambda_3 = \mu_1\mu_2$  et  $\mu_3 = \lambda_2$  les deux éléments de  $\pi_1(F)$  représentés respectivement par une longitude et un méridien de  $K_3$ . L'élément  $j_3$  de  $\pi_1(W_2)$  représenté par un lacet de  $F$  homotope à l'âme de  $T_3$ , orienté de sorte que  $i(a_3\lambda_3 - b_3\mu_3, j_3)$  vale 1, et l'élément  $j_4$  de  $\pi_1(W_2)$  représenté par  $\mu_1$  forment une base du groupe libre  $\pi_1(W_2)$ .

L'inclusion  $i_{1*}$  de  $\pi_1(F)$  dans  $\pi_1(W_1)$  s'écrit alors:

$$\begin{aligned} i_{1*}(\mu_1) &= j_1^{-b_1} & i_{1*}(\mu_2) &= j_2^{-b_2} \\ i_{1*}(\lambda_1) &= j_1^{a_1} & i_{1*}(\lambda_2) &= j_2^{a_2} \end{aligned}$$

tandis que l'inclusion  $i_{2*}$  de  $\pi_1(F)$  dans  $\pi_1(W_2)$  s'écrit:

$$\begin{aligned} i_{2*}(\mu_1) &= j_4 & i_{2*}(\mu_2) &= j_4^{-1}j_3^{b_3} \\ i_{2*}(\lambda_1) &= j_3^{a_3} & i_{2*}(\lambda_2) &= j_3^{a_3} & (i_{2*}(\mu_1\mu_2) &= j_3^{b_3}) . \end{aligned}$$

## 2.C. DESCRIPTION DES ESPACES DE REPRÉSENTATIONS ASSOCIÉS

$R_* = R(\pi_1(F_*))$  est identifié à  $(S^3)^4$  grâce à la base  $(\mu_1, \lambda_1, \mu_2, \lambda_2)$ : à une représentation  $\rho$  de  $R_*$  correspond le quadruplet  $(\rho(\mu_1), \rho(\lambda_1), \rho(\mu_2), \rho(\lambda_2))$ .

De la même manière,  $Q_1$  et  $Q_2$  sont identifiés à  $(S^3)^2$  grâce aux bases  $(j_1, j_2)$  et  $(j_3, j_4)$ .

Ces identifications orientent naturellement  $Q_1, Q_2$  et  $R_*$ .

D'après 3.4 (cf. la preuve de 3.8 i)) et les expressions de  $i_{1*}$  et de  $i_{2*}$ , on a:

$$(Q_1, Q_2)_{R_*} = \det \begin{pmatrix} -b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & a_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & a_3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = b_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 = 1$$

et donc:  $\lambda(\Sigma(a_1, a_2, a_3)) = \frac{1}{2} \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$ .

Le calcul consiste maintenant à évaluer  $\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$ .

### §3. ETUDE DE $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$

Cette intersection est  $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ , on utilise, pour simplifier les calculs et les notations, les conventions suivantes:

$a_1$  et  $a_2$  sont impairs (quitte à permuter  $a_1, a_2$  et  $a_3$  qui jouent le même rôle).

On peut alors choisir  $b_1$  et  $b_2$  pairs,  $b_3$  est alors impair.

Le groupe  $SU(2)$  est naturellement identifié à la sphère unité du corps  $\mathbf{H}$  des quaternions. On écrit les éléments de  $SU(2) = S^3$  sous la forme  $\exp(x)$  où  $x$  est un quaternion pur.

### 3.A. DESCRIPTION ENSEMBLISTE DE $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$

Cette description montrera en particulier le lemme suivant:

LEMME. *Il existe une bijection naturelle de  $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$  dans l'ensemble  $E$  des points entiers, intérieurs au tétraèdre  $T(a_1, a_2, a_3)$ , et dont les deux premières coordonnées sont paires.*

*Démonstration.* Description des éléments de  $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ :

Le groupe  $\pi_1(\Sigma)$  admet la présentation par générateurs et relations suivante:

$$\pi_1(\Sigma) = \langle \mu_1, \mu_2, h \mid h \text{ central, } \mu_1^{a_1} = h^{-b_1}, \mu_2^{a_2} = h^{-b_2}, (\mu_1 \mu_2)^{a_3} = h^{b_3} \rangle$$

$$(h = \lambda_1 = \lambda_2) ;$$

les représentations irréductibles de  $\pi_1(\Sigma)$  doivent associer 1 ou  $(-1)$  à l'élément central  $h$  de  $\pi_1(\Sigma)$ , on en déduit aisément que (cf. le lemme B.3.2) chaque classe de  $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$  contient exactement un représentant  $\rho$  tel que:

$$\rho(\mu_1) = \exp\left(\frac{ix_1\pi}{a_1}\right)$$

$$\rho(\mu_2) = \exp\left(\frac{(ir + j\sqrt{1-r^2})x_2\pi}{a_2}\right)$$

$$\text{et } \operatorname{Re}(\rho(\mu_1\mu_2)) \left( = \cos\left(\frac{x_1\pi}{a_1}\right) \cos\left(\frac{x_2\pi}{a_2}\right) - r \sin\left(\frac{x_1\pi}{a_1}\right) \sin\left(\frac{x_2\pi}{a_2}\right) \right)$$

$$= \cos\left(\frac{x_3\pi}{a_3}\right) \text{ (et donc } \rho(h) = (-1)^{x_3} \text{)}$$

où  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sont des entiers positifs non nuls respectivement strictement inférieurs à  $a_1, a_2$  et  $a_3$ ,

$x_1$  et  $x_2$  sont pairs,

et  $r$  est un réel strictement compris entre  $-1$  et  $1$ .

Ceci définit une bijection  $\phi$  de  $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$  dans l'ensemble des triplets  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $(2\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{Z}$  qui vérifient:

$$(*) \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, 3\}, 0 < x_i < a_i, \\ \exists r \in ]-1, 1[ \text{ tel que: } \cos\left(\frac{x_1\pi}{a_1}\right)\cos\left(\frac{x_2\pi}{a_2}\right) - r\sin\left(\frac{x_1\pi}{a_1}\right)\sin\left(\frac{x_2\pi}{a_2}\right) = \cos\left(\frac{x_3\pi}{a_3}\right) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, 3\}, 0 < x_i < a_i \\ \cos\left(\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2}\right)\pi\right) < \cos\left(\frac{x_3\pi}{a_3}\right) < \cos\left(\left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right)\pi\right) \end{cases}.$$

$$(*) \Leftrightarrow \left| \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} \right| < \frac{x_3}{a_3} < \min\left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2}, 2 - \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2}\right)\right)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} - \frac{x_1}{a_1} > 0 \\ \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} > 0 \\ \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} < 2$$

(\*)  $\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$  est intérieur à  $T(a_1, a_2, a_3)$ .  $\square$

LEMME. *Le cardinal de  $E$  est égal à  $\frac{1}{4} \tau(a_1, a_2, a_3)$ .*

*Démonstration.* Soit  $s_1$  (resp.  $s_2$ ) la symétrie axiale de  $T(a_1, a_2, a_3)$  qui, à  $(x_1, x_2, x_3)$ , associe le point  $(a_1 - x_1, a_2 - x_2, x_3)$  (resp.  $(a_1 - x_1, x_2, a_3 - x_3)$ );  $s_1, s_2$  et  $s_2s_1$  transforment respectivement  $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap ((2\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{Z})$  en  $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap ((2\mathbf{Z} + 1)^2 \times \mathbf{Z})$ ,  $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap ((2\mathbf{Z} + 1) \times 2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$  et  $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap ((2\mathbf{Z}) \times (2\mathbf{Z} + 1) \times \mathbf{Z})$ ; le cardinal de  $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap \mathbf{Z}^3$  est donc égal à quatre fois celui de  $\overset{\circ}{T}(a_1, a_2, a_3) \cap ((2\mathbf{Z})^2 \times \mathbf{Z})$ .  $\square$

*Démonstration de C.2.* Soit  $\pi = (a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1)$  le cardinal de  $P = ]0, a_1[ \times ]0, a_2[ \times ]0, a_3[ \cap \mathbf{Z}^3$ .

Soit  $\tau_k$  le cardinal de  $T_k = \{(x_1, x_2, x_3) \in P \mid (k - 1) < \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} < k\}$ .

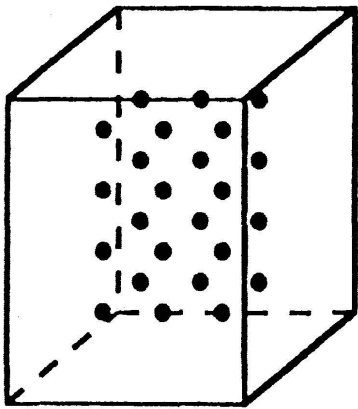


FIGURE 5

$P(3,4,5)$

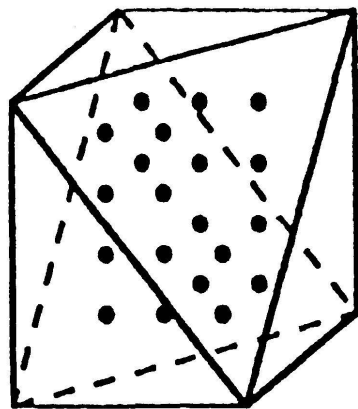
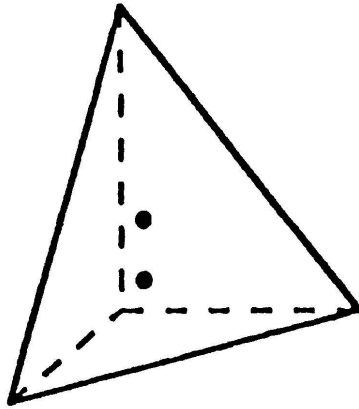
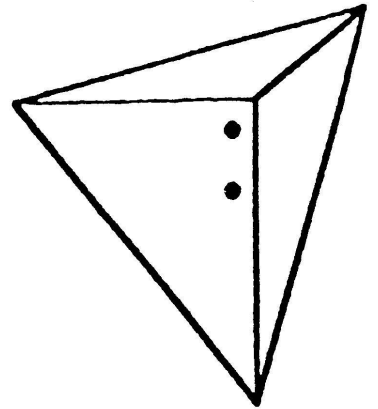


FIGURE 6

$T_1, T_2$  et  $T_3$



Comme les entiers  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont premiers entre eux deux à deux, les hyperplans de définition de  $T(a_1, a_2, a_3)$ ,  $T_1, T_2$  et  $T_3$  ne rencontrent pas  $P$ ; on en déduit que  $P$  est réunion disjointe de  $T_1, T_2$  et  $T_3$  (donc:  $\pi = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ ) et que le cardinal de  $P \setminus T(a_1, a_2, a_3)$  est  $(\pi - \tau)$ . ( $\tau = \tau(a_1, a_2, a_3)$ )

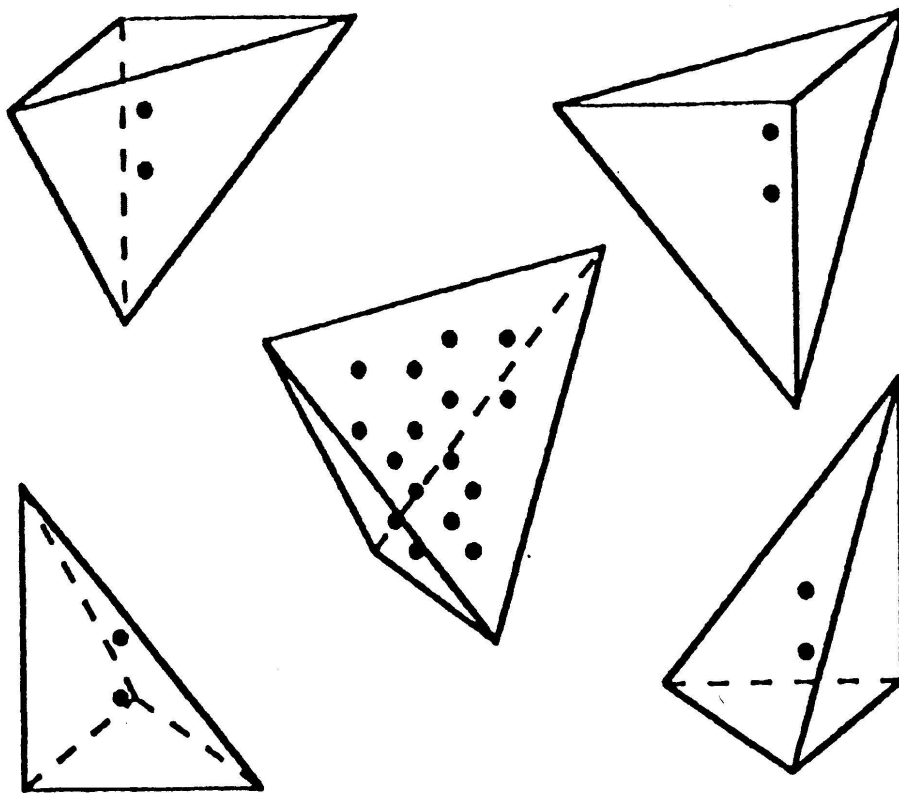


FIGURE 7

$T(3,4,5)$  et les quatre composantes de  $P \setminus T(3,4,5)$

De plus, comme les symétries du parallélépipède  $P$  opèrent transitivement sur ses sommets en laissant le réseau  $\mathbf{Z}^3$  invariant,  $T_1$  est isomorphe à  $T_3$  et aux quatre composantes de  $P \setminus T(a_1, a_2, a_3)$ , d'où

$$\tau_1 = \tau_3 = \frac{1}{4}(\pi - \tau), \text{ puis } \sum_{k=1}^3 (-1)^k \tau_k = \pi - 4\tau_1 = \tau. \quad \square$$

*Démonstration de C.3.* Un théorème de Mordell (Theorem 5 du paragraphe 3E de [RG]) donne l'expression arithmétique de  $\tau_1(a_1, a_2, a_3)$ :

$$\begin{aligned} \tau_1(a_1, a_2, a_3) = & - [s(a_1 a_2, a_3) + s(a_3 a_1, a_2) + s(a_2 a_3, a_1)] \\ & + \frac{a_1 a_2 a_3}{12} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i^2} \right) + \frac{1}{12 a_1 a_2 a_3} \\ & + \frac{a_1 a_2 a_3}{6} - \frac{a_1 a_2 + a_3 a_1 + a_2 a_3}{4} + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La relation entre  $\tau(a_1, a_2, a_3)$  et  $\tau_1(a_1, a_2, a_3)$ :

$$\langle \tau(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 1)(a_2 - 1)(a_3 - 1) - 4\tau_1(a_1, a_2, a_3) \rangle$$

permet alors de conclure.  $\square$

### 3.B. ETUDE DU VOISINAGE DE $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ DANS $\hat{R}$

PROPOSITION.  $\hat{Q}_1$  et  $\hat{Q}_2$  sont transverses dans  $\hat{R}$  et le signe associé à tout point de l'intersection est «moins».

*Démonstration.* Soit  $\hat{p}$  un point de  $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ ; supposons connues des cartes orientées  $F_1, F_2$  et  $F$  de  $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$  et  $\hat{R}$  au voisinage de  $\hat{p}$ ; il suffit de montrer que le déterminant de la matrice  $M$  de l'application linéaire

$$L: \mathbf{R}^3 \oplus \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^6$$

$$(x_1, x_2) \mapsto D_{|F_1(\hat{p})}(F \circ \hat{i}_1 \circ F_1^{-1}) \cdot x_1 + D_{|F_2(\hat{p})}(F \circ \hat{i}_2 \circ F_2^{-1}) \cdot x_2$$

est strictement négatif.

On commence donc par définir des cartes  $F_1, F_2$  et  $F$  de sorte que cette matrice s'écrive le plus simplement possible (on choisit les représentants des classes de conjugaison comme au début du paragraphe C.3.A.):



LEMME. «*Cartes au voisinage d'un point  $\hat{\rho}$  de  $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$* »

On note:

$$\varepsilon = \rho(\lambda_1) = \rho(h),$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ , les trois angles de  $]0, \pi[$  tels que  $\rho(\mu_1), \rho(\mu_2), \rho(\lambda_3) = \rho(\mu_1 \mu_2)$  soient respectivement conjugués à  $\exp(i\theta_1), \exp(i\theta_2)$  et  $\exp(i\theta_3)$

et  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  les trois signes tels que  $\sin(-b_1 \varepsilon_1 \theta_1), \sin(-b_2 \varepsilon_2 \theta_2)$  et  $\sin(b_3 \varepsilon_3 \theta_3)$  soient strictement positifs.

1. *Le difféomorphisme  $F_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  de  $\hat{Q}_1$  dans  $\varepsilon_1]0, \pi[ \times \varepsilon_2]0, \pi[ \times ]-1, +1[$  qui, à la classe de  $(\exp(i\varphi), \exp((ir + j\sqrt{1-r^2})\theta))$ , associe  $(\varphi, \theta, r)$ , définit une carte orientée de  $\hat{Q}_1$ .*

2. *Le difféomorphisme  $F_2$  de  $\hat{Q}_2$  dans  $\varepsilon_3]0, \pi[ \times ]-1, +1[ \times ]0, \pi[$  qui, à la classe de  $(\exp((ir + \exp(i\varphi)j\sqrt{1-r^2})\theta), \exp(i\varphi))$ , associe  $(\varphi, r, \theta)$ , définit une carte orientée de  $\hat{Q}_2$ .*

3. *L'application  $F$  de  $\hat{R}$  dans  $(]0, \pi[ \times ]-1, +1[)^2 \times ]-1, +1[$  qui, à la classe de l'élément*

$$(\exp(i\varphi), \varepsilon(g_1 + ig_i + jg_j + kg_k), \exp((ir + j\sqrt{1-r^2})\theta), \varepsilon(h_1 + ih_i + jh_j + kh_k))$$

*associe l'élément  $(\varphi, g_i, \theta, r, h_j, h_k)$  définit une carte orientée au voisinage de  $\hat{\rho}$  dans  $\hat{R}$ .*

*Démonstration.*

1. Supposons d'abord  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  égaux à 1.

Comme  $\tilde{Q}_1$  est connexe, pour montrer que  $F_1(1, 1)$  est une carte de  $\hat{Q}_1$  orienté comme base du  $SO(3)$ -fibré  $(\tilde{Q}_1 \rightarrow \hat{Q}_1)$ , il suffit de calculer le jacobien (positif!) de l'application tangente en  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, 1\right)$  du difféomorphisme

$$G_1: ]0, \pi[^2 \times ]-1, +1[ \times SO(3) \rightarrow \tilde{Q}_1,$$

$$(\varphi, \theta, r, \gamma) \mapsto (\exp(i\varphi) \cdot \gamma, \exp((ir + j\sqrt{1-r^2})\theta) \cdot \gamma).$$

Pour conclure la démonstration de 1. dans les cas où  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est différent de  $(1, 1)$ , il suffit de remarquer que si  $k(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est le difféomorphisme orienté

$$k(\varepsilon_1, \varepsilon_2): \quad \varepsilon_1]0, \pi[ \times \varepsilon_2]0, \pi[ \times ]-1, +1[ \rightarrow ]0, \pi[^2 \times ]-1, +1[ \\ (\varphi, \theta, r) \quad \mapsto (\varepsilon_1 \varphi, \varepsilon_2 \theta, \varepsilon_1 \varepsilon_2 r),$$

le composé  $k(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \circ F_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  est égal à  $F_1(1, 1)$ .

2. Se déduit de 1, si l'on remarque que

$$(\exp(i\varphi), \exp((ir + \exp(i\varphi)j\sqrt{1-r^2})\theta))$$

est conjugué à  $(\exp(i\varphi), \exp((ir + j\sqrt{1-r^2})\theta))$ .

3. a) Soit  $U = ]0, \pi[ \times S^3 \times ]0, \pi[ \times ]-1, 1[ \times S^3$ ,  
soit  $G$  le difféomorphisme

$$G: U \times SO(3) \rightarrow G(U \times SO(3)) \subset R_*$$

$$((\varphi, g, \theta, r, h), \gamma) \mapsto (\exp(i\varphi) \cdot \gamma, \varepsilon g \cdot \gamma, \exp((ir + j\sqrt{1-r^2})\theta) \cdot \gamma, \varepsilon h \cdot \gamma),$$

et soit  $G_r$  la restriction de  $G$  à  $U \times \{1\}$ ,  
 $p$  désigne la projection de  $R_*$  sur  $\hat{R}_*$ , et  $p_r$  désigne sa restriction de  
 $G(U \times \{1\})$  dans  $p \circ G(U \times \{1\})$ ; d'après 1,  $p_r \circ G_r$  est un difféomorphisme  
qui renverse l'orientation.

b) De plus, le calcul de l'application tangente en  $p_r^{-1}(\hat{p})$  de  $\partial$  montre que  
l'application (qui définit implicitement  $\psi$ )

$$(\partial \times \psi) \circ G_r: (U \times \{1\}) \rightarrow S^3 \times (]0, \pi[ \times ]-1, +1[)^2 \times ]-1, +1[^2$$

$$u = (\varphi, g = (g_1 + ig_i + jg_j + kg_k), \theta, r, h = (h_1 + ih_i + jh_j + kh_k))$$

$$\mapsto (\partial G_r(u) = [g^{-1}, \exp(i\varphi)] [\exp(-(ir + j\sqrt{1-r^2})\theta), h^{-1}], (\varphi, g_i, \theta, r, h_j, h_k))$$

est un difféomorphisme qui renverse l'orientation au voisinage de  
 $G_r^{-1}p_r^{-1}(\hat{p})$ .

On en déduit que  $F = \psi \circ p_r^{-1}$  définit une carte orientée de  $\hat{R}$  au voisinage  
de la classe de  $\hat{p}$  de la manière suivante:

Si l'on écrit l'inverse de  $G$  de  $G(U \times SO(3))$  dans  $U \times SO(3)$  sous la forme  
 $(G_r^{-1} \circ p_r^{-1} \circ p) \times \tilde{\gamma}$  (où  $\tilde{\gamma}$  est le composé de  $G^{-1}$  et de la projection sur  
 $SO(3)$ ) l'application  $\tilde{\chi} = [(\partial \times \psi) \circ p_r^{-1} \circ p] \times \tilde{\gamma}$  est, d'après a) et b), un  
difféomorphisme orienté d'un voisinage de la classe de  $\hat{p}$  dans  $R_*$  dans un  
ouvert de  $S^3 \times \mathbf{R}^6 \times SO(3)$ .

Le composé  $(\chi = \partial \times (\psi \circ p_r^{-1} \circ p) \times \tilde{\gamma})$  de  $\tilde{\chi}$  et du difféomorphisme  
orienté de  $S^3 \times \mathbf{R}^6 \times SO(3)$ , qui à  $(g, x, \gamma)$  associe  $(g \cdot \gamma, x, \gamma)$ , est alors un  
difféomorphisme orienté d'un voisinage de la classe de  $\hat{p}$  dans  $R_*$  dans un  
ouvert de  $S^3 \times \mathbf{R}^6 \times SO(3)$  tel que:

$$\partial(\chi^{-1}(g, x, \gamma)) = g \quad \text{et} \quad \chi([\chi^{-1}(g, x, \gamma)] \cdot \gamma') = (g, x, \gamma \gamma').$$

Ceci, d'après les conventions d'orientation de 3.11, permet de conclure la  
démonstration du lemme.  $\square$

Avec ces cartes, la matrice  $M$  s'écrit:

$$\begin{pmatrix} ? & 0 & 0 & t_4 & 0 & ? \\ t_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \\ ? & ? & 0 & ? & t_6 & ? \\ ? & ? & t_2 & ? & ? & ? \\ ? & t_5 & 0 & ? & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } t_1 = a_3 \sin(\varphi) \sqrt{1-r^2} \quad t_3 = a_1 \quad t_5 = a_2 \sqrt{1-r^2}$$

$$t_2 = 1 \quad t_4 = 1 \quad t_6 = - \frac{\sin(\varphi) \sin(\varepsilon_3 b_3 \theta_3)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(x = \cos(\varphi) \cos(\varepsilon_3 b_3 \theta_3) + r \sin(\varphi) \sin(\varepsilon_3 b_3 \theta_3)) ,$$

son déterminant qu'on peut calculer en factorisant successivement les  $t_i$  dans l'ordre indiqué par leurs indices est égal à

$$- \frac{a_1 a_2 a_3 \sin^2(\varphi) (1-r^2) \sin(\varepsilon_3 b_3 \theta_3)}{\sqrt{1-x^2}}$$

il est donc bien strictement négatif.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [AB] ATIYAH, M. and R. BOTT. The Yang-Mills equations over a Riemann surface. *Phil. Trans. Royal Soc. London* 308 (1987), 523-615.
- [AMcC] AKBULUT, S. and J. D. Mc CARTHY. *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres, an exposition*. Mathematical Notes 36, Princeton University Press 1990.
- [BL] BOYER, S. and D. LINES. Surgery formulae for Casson's invariant and extension to homology lens spaces. *J. Für die Reine und angewandte Mathematik* 405 (1990), 181-220.
- [CLM] CAPPELL, S., R. LEE and E. MILLER. A symplectic geometry approach to generalized Casson's invariants of 3-manifolds. *B.A.M.S.* 22 (1990), 269-275.
- [D] DOLD, A. *Lectures on algebraic topology*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 200 Springer-Verlag, 1972.
- [FS] FINTUSHEL, R. and R. STERN. Instanton homology of Seifert fibered homology three sphere. *Proc. London Math. soc., 3<sup>rd</sup> series* 61 (1990), 109-137.