

4. Towers of Hanoi and Toeplitz sequences

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

If, instead of C one takes a “generalized” Morse sequence C' , and if one defines

$$A'(n) = C'(n) + C'(n + 1) \text{ modulo } 2 ,$$

then A' is also a Toeplitz sequence, as proved in [16].

4. TOWERS OF HANOI AND TOEPLITZ SEQUENCES

The tower of Hanoi puzzle consists of three vertical pegs and of N circular disks of different diameters stacked in decreasing order on the first peg. At each step one may transfer the topmost disk from a peg to a different peg according to the rule: no disk is allowed to be on a smaller one. The game ends when all the disks are stacked on the second or third peg.

The sequence of moves for the classical (minimal) Hanoi tower algorithm can be generated in a very easy way as it is 2-automatic (see [4] and section 6), which essentially means that the k^{th} move can be predicted by a machine with bounded memory. More precisely number the pegs as I, II, III and define a (respectively b, c) to be the move which takes the topmost disk from peg I (respectively II, III) and puts it on peg II (respectively III, I). Let $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ be the respective opposite moves. Then the sequence of moves for N disks is the prefix of length $2^N - 1$ of an infinite sequence U which is 2-automatic. Moreover the following proposition is proved in [4]:

PROPOSITION. *The infinite sequence of moves U is equal to the Toeplitz transform of $((a\bar{c}b\omega\bar{c}b\bar{a}\omega\bar{b}\bar{a}c\omega)^\infty, id)$.*

Note that, keeping the notations of [4], the sequence U is indexed by $1, 2, \dots$ and not by $0, 1, 2, \dots$ as the sequences above.

5. PROGRESSION-FREE SEQUENCES AND TOEPLITZ SEQUENCES

The question of finding a sequence of integers without arithmetic progressions of given length has been intensively studied (see its history in [14] and the included bibliography). In particular what is the “minimal” increasing sequence having this property?

One knows that, if k is a prime number, the minimal sequence of integers without any arithmetic progression of k terms is exactly the increasing sequence of the integers without the digit $k - 1$ in their base k expansion (cited