§6. Ganea's conjecture

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Proof. Suppose $\mathrm{cat}_0(\Lambda Z) = m$. Then ΛZ is a retract of $\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z$ and we see that $\Lambda Z \otimes \Lambda y$ is a retract of $\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z \otimes \Lambda y$. Now, the maximal product length of $\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z \otimes \Lambda y$ is $m+1$ and this is sufficient to ensure $\mathrm{cat}_0(\Lambda Z \otimes \Lambda y) \leqslant m + 1$. $\square$

Now, by induction, we see that $\mathrm{cat}_0(\Lambda) \leqslant n$ (since for x_1 of odd degree $\mathrm{cat}_0(\Lambda x_1) = 1$). Putting this together with the Lemma gives

THEOREM 2. *If* $\Lambda = (\Lambda(x_1, \cdots x_n), d)$ *with* $\deg(x_i) = \mathrm{odd}$ *for each* i, *then* $\mathrm{cat}_0(\Lambda) = n$.

This result may be applied, for example, to a manifold obtained as an iterated principal bundle. That is, for compact Lie groups G_i, $i = 1$ to N.

$M_1 = G_1$; M_i is obtained from M_{i-1} as a principal G_i-bundle over M_{i-1}.

$M = M_N$

Each G_i is, rationally, a product of $\mathrm{rank}(G_i)$ odd spheres, so the minimal model of M has the form,

$$\Lambda(M) = (\Lambda(x_1, \cdots x_s), d)$$

with $\deg(x_i) = \mathrm{odd}$ and $s = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{rank}(G_i)$.

COROLLARY. $\mathrm{cat}_0(M) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{rank}(G_i)$.

COROLLARY. *If* M *is an iterated principal bundle with fibres* G_i, *then the number of critical points of any smooth function on* M *is bounded below by* $\sum_i \mathrm{rank}(G_i) + 1$.

Note that we have not determined $\mathrm{cat}(M)$, so the true effectiveness of Lusternik-Schnirelmann theory may not have been exploited.

§6. GANEA'S CONJECTURE

The Ganea Conjecture states that, for a finite CW complex X, $\mathrm{cat}(X \times S^k) = \mathrm{cat}(X) + 1$ for any sphere S^k. Although unproven in general, various cases of the conjecture have been shown to be true. We add nilmanifolds to that list:

THEOREM. *Ganea's Conjecture is true for nilmanifolds.*

Proof. Let M be a nilmanifold. Then

$$\begin{aligned}\dim M + 1 &= e_0(M) + 1 \\ &= e_0(M \times S^k) \text{ since } e_0 \text{ respects products} \\ &\leqslant \operatorname{cat}(M \times S^k) \\ &\leqslant \operatorname{cat}(M) + 1 \text{ Fox's inequality} \\ &= \dim M + 1 .\end{aligned}$$

Hence all inequalities are equalities and $\operatorname{cat}(M \times S^k) = \operatorname{cat}(M) + 1$. □

ADDED IN PROOF. By using the equality $e_0(M) = \dim(M)$ and extending the e_0-invariant to maps, C. McCord and the author have given a proof of the Arnold Conjecture for nilmanifolds (cf. C. McCord and J. Opera, *Rational Ljusternik-Schnirelmann Category and the Arnold Conjecture for Nilmanifolds,* preprint 1992). That is, any smooth 1-periodic Hamiltonian system on a symplectic nilmanifold M has at least $\dim(M) + 1$ contractible 1-periodic orbits.

REFERENCES

[1] ABRAHAM, R. and J. R. MARSDEN. *Foundations of Mechanics, 2nd Ed.* (1985 version) Addison-Wesley, 1978.

[2] FELIX, Y. La Dichotomie Elliptique-Hyperbolique. In *Homotopie Rationnelle, Astérisque 176,* Soc. Math. France, 1989.

[3] FELIX, Y. and S. HALPERIN. Rational L. S. Category and Its Applications. *Trans. Amer. Math. Soc. 273* (1982), 1-73.

[4] GRIFFITHS, P. and J. MORGAN. *Rational Homotopy Theory and Differential Forms.* Progress in Math. 16, Birkhaüser, 1981.

[5] HALPERIN, S. Finiteness in the Minimal Models of Sullivan. *Trans. Amer. Math. Soc. 230* (1977), 173-199.

[6] —— *Lectures on Minimal Models.* Mémoires Soc. Math. France 9-10 (1983).

[7] LAMBE, L. and S. PRIDDY. Cohomology of Nilmanifolds and Torsionfree Nilpotent Groups. *Trans. Amer. Math. Soc. 273* (1982), 39-55.

[8] LUSTERNIK, L. and L. SCHNIRELMANN. *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels.* Actualités Scientifiques et Industrielles 188, Hermann et Cie, Paris, 1934.

[9] TOOMER, G. H. L. S. Category and the Moore Spectral Sequence. *Math. Z. 138* (1974), 123-143.