

Objektyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.08.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## PERMUTATION GROUPS GENERATED BY A TRANSPOSITION AND ANOTHER ELEMENT

by Gerald J. JANUSZ

**ABSTRACT:** The subgroup of the symmetric group  $\text{Sym}(n)$  generated by a transposition and another element is described explicitly using data easily obtained from the two elements. The proofs use a graph that is defined for any subgroup of  $\text{Sym}(n)$  that contains a transposition. Application is made to prove that a rational, irreducible polynomial of degree  $n$  having exactly  $n - 2$  real roots is not solvable by radicals provided that  $n$  is not divisible by 2 or 3.

In the beginning study of the symmetric group  $\text{Sym}(\Omega)$  of all permutations on a set  $\Omega$  the student learns the standard fact that every permutation can be expressed as a product of transpositions; otherwise put,  $\text{Sym}(\Omega)$  is generated by its transpositions. In some expositions, other generating sets are mentioned. For example for a prime  $p$ , it is not difficult to show that the symmetric group  $\text{Sym}(p)$  on  $p$  symbols is generated by a  $p$ -cycle and a transposition. In fact any  $p$ -cycle and any transposition will generate  $\text{Sym}(p)$ .

A well-known theorem of Galois theory folklore (see [1, Theorem 4.16]) uses this information about the generation of the symmetric group to prove the existence of polynomials not solvable by radicals. In this theorem one considers a polynomial  $f(x)$  of prime degree  $p \geq 5$  having rational coefficients. Assume that  $f(x)$  is irreducible over the rational numbers and has exactly  $p - 2$  real roots. Then the Galois group of the splitting field of  $f(x)$  over the rational field is not solvable. In fact the Galois group is isomorphic to the symmetric group on  $p$  symbols. In particular the polynomial is not solvable by radicals. Here is a sketch of the proof. When the Galois group is regarded as a permutation group on the  $p$  roots of  $f(x)$ , the hypothesis implies that the Galois group contains a  $p$ -cycle and a transposition and hence it must be the full symmetric group on the  $p$  roots.

This proof breaks down for nonprime degree. If  $n$  is not prime, an  $n$ -cycle may be paired with a transposition in  $\text{Sym}(n)$  to generate a subgroup smaller