Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ACTIONS QUASI-LINÉAIRES SUR LES SPHÈRES
Kapitel: 2. G-COBORDISMES D'ACTIONS
Autor: Hausmann, Jean-Claude
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59482

exemple pour le cas $n = 1$, $G = C_3$ (cyclique d'ordre 3) ou $(D_3$ (dihédral). On obtient alors une nouvelle action

$$G \times S^n \to S^n$$

$$(g,x) \mapsto g*x = e^{-1}(ge(x))$$

Une telle action sera dite *quasi-linéaire* (QL) (d'action linéaire associée α). Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier les questions suivantes:

1) Une action QL est-elle toujours différentiablement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un difféomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x)$)?)

2) Une action QL est-elle toujours topologiquement conjuguée à son action linéaire associée? (C'est-à-dire, existe-t-il un homéomorphisme $h: S^n \to S^n$ tel que $g*x = h^{-1}gh(x)$)?)

3) Toute action de G sur S^n est-elle différentiablement (ou topologiquement) conjuguée à une action QL?

On verra que la réponse à ces questions, pour différents n et G, est parfois positive, parfois négative et parfois ouverte et équivalente à un problème célèbre, par exemple la conjecture de Poincaré différentiable en dimension 4. Il est à remarquer que ces questions, dont l'énoncé est extrêmement élémentaire, mettent en jeu, pour leur résolution, une partie importante des grandes techniques de la topologie différentielle.

Des exemples naturels d'actions QL sont donnés au paragraphe 7. On en trouvera aussi dans [Ha2], paragraphe 4.

Je tiens à remercier P. Vogel et M. Rothenberg pour d'intéressantes discussions.

2. G-COBORDISMES D'ACTIONS

Soit G un groupe de Lie. Nous travaillons dans la catégorie des G-variétés. Un objet de cette catégorie est une paire (V, α), où V est une variété différentiable (C^∞) et α: $G \times V \to V$ est une action différentiable. Une telle acton définit (et est déterminée par) un homomorphisme $G \to \mathrm{DIFF}(V)$, où $\mathrm{DIFF}(V)$ dénote le groupe des difféomorphismes de V. Cet homomorphisme sera également dénoté par α. De ce point de vue, un morphisme de (V_1, α_1) vers (V_2, α_2) est une application différentiable f: $V_1 \to V_2$ qui est G-équivariante, ce qui peut s'écrire $f \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ f$.

Un *G-cobordisme* entre deux G-variétés (V_1, α_1) et (V_2, α_2) est une G-variété (B, β), où (B, V_1, V_2) est un cobordisme (i.e. $\partial B = V_1 \amalg V_2$) tel que la

G-action β: $Gx(B, V_1, V_2) \to (B, V_1, V_2)$ étende α_1 et α_2. Un tel cobordisme est dit *G-inversible à droite* s'il existe un G-cobordisme (C, γ) entre (V_2, α_2) et (V_1, α_1) et un G-difféomorphisme

$$h: (B \cup_{V_2} C, V_1, V_1) \to (V_1 \times [0,1], V_1 \times \{0\}, V_1 \times \{1\})$$

valant l'identité sur le bord (où $V_1 \times [0,1]$ est muni de la G-action produit).

Rappelons qu'un cobordisme (W, M, N) est un *h-cobordisme* si les inclusions $M \subset W$ et $N \subset W$ sont des équivalences d'homotopie.

Les résultats relatifs aux actions QL se déduiront du théorème suivant:

(2.1) THÉORÈME. *Une G-action α: $G \times S^n \to S^n$ est une action QL, associée à l'action linéaire α': $G \to O_{n+1}$, si et seulement si il existe un G-cobordisme (B, β) de (S^n, α') vers (S^n, α) qui est G-inversible à droite. Dans ce cas, B est toujours un h-cobordisme entre deux copies de S^n.*

Remarque. Un G-cobordisme (W, M, N) qui est un h-cobordisme (comme dans le théorème 2.1) n'est en général pas un h-cobordisme de G-variétés, notion qui conduit au théorème du s-cobordisme équivariant. Dans la définition d'un h-cobordisme de G-variétés, on demande que, pour tout sous-groupe H de G, les variétés de points fixes (W^H, M^H, N^H) soient également des h-cobordismes (voir [Ro], Section 3). Les exemples traités ci-dessous ne satisfont pas à cette condition.

Démonstration. Supposons que la G-action α soit QL. Il existe donc un plongement de G-variétés e: $(S^n, \alpha) \hookrightarrow (\mathbf{R}^{n+1}, \alpha')$ tel que $X = e(S^n)$ englobe O. En le composant au besoin avec une homothétie, on peut supposer que X englobe la sphère de rayon 1 et que X est elle-même englobée par la sphère de rayon $r > 1$. La région B_1 de $\mathbf{R}^{n+1}$ comprise entre S^n et X est un G-cobordisme (entre (S^n, α') et (X, α') qui est G-inversible à droite. En effet, son inverse est la région C_1 comprise entre X et rS^n. Soient $M(e)$ le mapping-cylindre du G-difféomorphisme e: $S^n \to X$ et $M(e^{-1})$ celui de son inverse. Le G-cobordisme (B, β) cherché de (S^n, α') vers (S^n, α) est $B = B_1 \cup M(e^{-1})$ et son inverse à droite est $C = C_1 \cup M(e)$.

Réciproquement, soit (B, β) un G-cobordisme de (S^n, α') vers (S^n, α) et (C, γ) un inverse à droite de (B, β). Il existe donc un G-difféomorphisme E de $A \cup B$ sur la G variété $(\{\times \in \mathbf{R}^{n+1} \mid 1 \leqslant \| \times \| \leqslant 2\}, \alpha')$ qui est l'identification naturelle sur les bords. La restriction e de E à $A \cap B = S^n$ donne un G-plongement de (S^n, α) dans $(\mathbf{R}^{n+1}, ')$, prouvant que α est une action QL.

Il reste à démontrer que B est un h-cobordisme. Pour cela, on démontre que B est simplement connexe et que les deux inclusions $S^n \subset B$ induisent des isomorphismes sur l'homologie entière. Ceci s'obtient en appliquant le théorème de Seifert-Van-Kampen et la suite de Mayer-Vietoris au diagramme co-cartésien

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ C & S^n \times [0,1] \, . \end{tikzcd}$$

(2.2) *Exemples.* Soit M^n une variété contractile dont le bord $V = \partial M$ n'est pas simplement connexe (V est une sphère d'homologie; c.f. [Ke] pour des exemples).

Soit D un n-disque compact dans int$M$ et soit $A = M - \mathrm{int}D$. Considérons deux copies M_1 et M_2 de M et construisons la variété

$$W^{n+1} = (M_1 \times [0,1]) \quad (M_2 \times [0,1])/\{(x_1,0) = (x_2,0) \,|\, x_1 = x_2 \in A\}$$

formée de deux copies de $Mx[0,1]$ collées le long de A. La variété W, munie de l'involution échangeant (x_1,t) avec (x_2,t) est un h-cobordisme de S^n vers la variété $X = M \cup_V M$ qui est difféomorphe à S^n si $n \geqslant 5$, par le théorème du h-cobordisme. Le même théorème montre que (W, X, S^n) est le C_2-inverse à droite de (W, S^n, X) (car $A \cup_V A = S^{n-1} \times [0,1]$). L'involution sur X est donc QL par le théorème 2.1, associée à la réflexion par rapport à un hyperplan. Mais ces deux involutions ne sont pas topologiquement conjuguées puisque leurs espaces de points fixes (S^{n-1} et V) ne sont pas homéomorphes. (voir fig. 2)

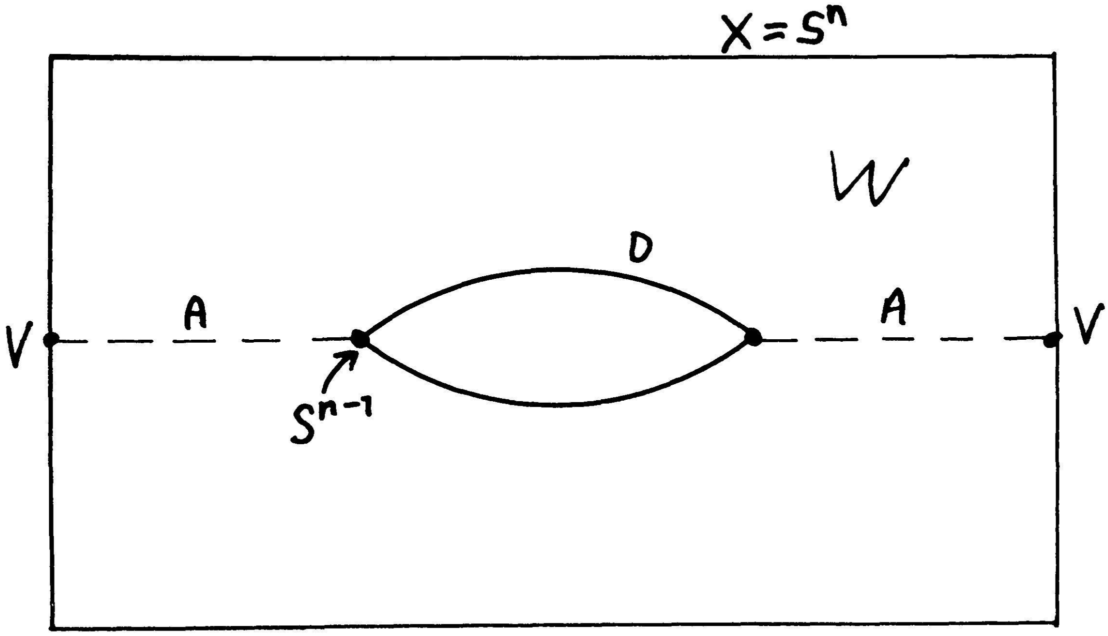

FIGURE 2