6. Actions libres de S^3

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

6. ACTIONS LIBRES DE S^3

Les résultats pour S^3 sont similaires à ceux pour S^1 (à part la proposition 5.1 qui ne se retrouve que partiellement dans 6.4.a). Les démonstrations sont identiques, le rôle de $\mathbf{CP}^2$ étant tenu par $\mathbf{HP}^1 = S^4$ (et la 1re classe de Chern étant remplacée par la seconde). Les détails sont donc laissés au lecteur.

(6.2) THÉORÈME. *Toute action libre QL de S^3 sur S^n, avec $n \geqslant 11$, est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

(6.3) *Remarque.* Il existe, en général, une infinité dénombrable d'actions libre de S^3 sur S^n ($n \geqslant 11$) qui sont deux-à-deux non-topologiquement conjuguées (voir [Hs] pour un exemple dans le cas $n = 11$). Ces actions ne sont donc pas topologiquement conjuguées à une action *QL*.

Comme dans le paragraphe précédent, la situation des actions de S^3 sur S^7 est très différente:

(6.4) THÉORÈME. a) *Toute action libre de S^3 sur S^7 est différentiablement conjuguée à une action QL et topologiquement conjuguée à l'action standard.*

b) *L'ensemble des classes de conjugaison différentiable d'actions QL libres de S^3 sur S^7 se surjecte sur l'ensemble des classes de difféomorphisme de structures différentiables sur S^4. Les préimages de cette surjection ont au plus 2 éléments.*

Remarque. La détermination de l'ensemble des classes de difféomorphisme de structures différentiables sur S^4 constitue un problème ouvert et on ne sait même pas s'il est fini. L'hypothèse que cet ensemble est réduit à un seul élément est connue sous le nom de «conjecture de Poincaré différentiable».

Comme dans la preuve de 5.5, on montre que la préimage d'une variété V homéomorphe à S^4 par la surjection de 6.5.b est unique si et seulement si V possède un difféomorphisme sur elle-même renversant l'orientation (rappelons que ce n'est en général pas le cas pour des sphères d'homotopie de dimension supérieure ou pour certaines structures différentiables exotiques sur $\mathbf{R}^4$). Cependant, comme c'est le cas pour $V = S^4$, on a:

(6.5) COROLLAIRE. *Les deux énoncés suivants sont équivalents:*

1) *Toute action libre de S^3 sur S^7 est différentiablement conjuguée à l'action standard.*

2) *Toute variété différentiable homéomorphe à S^4 est difféomorphe à S^4 (conjecture de Poincaré différentiable en dimension 4).*