0. Introduction

L'Enseignement Mathématique, t. 38 (1992), p. 71-88

POLYÈDRES ET RÉSEAUX

par Michel BRION

0. INTRODUCTION

De nombreux problèmes de combinatoire se ramènent à énumérer les points communs à un polytope convexe P, et à un réseau M qui contient tous les sommets de P; il s'agit en particulier d'étudier l'application $i_P(n)$ qui à tout entier $n \geqslant 1$, associe le nombre de points communs à M et au multiple nP de P. Un résultat remarquable dû à E. Ehrhart, affirme que i_P se prolonge en une fonction polynomiale, dont la valeur en tout entier négatif $-n$ est (au signe près) le nombre de points communs à M et à $n\mathring{P}$, où $\mathring{P}$ est l'intérieur de P (voir [E], §§5 et 6). Ce théorème a été généralisé par I. Macdonald et d'autres, au cas où chaque point m de $M \cap (nP)$ est compté avec un certain coefficient, par exemple l'angle solide sous lequel on peut voir nP depuis m (voir [M], [MM]).

Plus récemment, sous l'impulsion de R. Stanley, ces résultats ont été redémontrés, et d'autres propriétés de la fonction i_P ont été établies, par des méthodes d'algèbre commutative. Renvoyons à [S], [H] pour plus de précisions, et aussi pour des applications intéressantes à des questions combinatoires. Dans [B], l'auteur a introduit une autre approche, qui repose sur une notion de fonction caractéristique d'un polyèdre convexe, et sur des identités entre ces fonctions. Voici de quoi il s'agit: à tout point m du réseau M, on associe un «monôme de Laurent» x^m; si M est identifié à $\mathbf{Z}^d$, et m à $(m_1, \ldots, m_d)$, c'est le monôme $x_1^{m_1} \cdots x_d^{m_d}$. La fonction caractéristique $\varphi(P)$ d'un polyèdre convexe entier P est la somme des x^m pour $m \in P \cap M$; c'est une série formelle de Laurent. On montre que $\varphi(P)$ est le développement en série d'une fraction rationnelle $\Phi(P)$, ayant pour dénominateur un produit de termes de la forme $1 - x^m, m \in M \backslash \{0\}$. De plus, $\Phi(P)$ est la somme des fractions rationnelles attachées aux «cônes tangents» aux sommets de P, où le cône tangent en un sommet s de P est le plus petit cône convexe de sommet s, qui contient P. Le même résultat vaut en remplaçant P et ses cônes tangents par leurs intérieurs. Lorsqu'on multiplie P par un entier, ces relations se transforment de façon très simple, ce qui permet de retrouver le résultat d'Ehrhart (si P est un polytope) par un passage à la limite en $x = 1$. On peut même donner une formule explicite, mais horrible, pour la fonction i_P (voir [B], Théorème 3.1).

Dans [B], les identités précédentes entre fonctions caractéristiques ont été établies grâce au dictionnaire entre polyèdres convexes entiers, et variétés toriques munies d'un fibré en droites ample (voir [O], Chapter II). Ensuite, M. Ishida a donné une démonstration élémentaire de résultats un peu plus généraux (voir [I]). Le but de ce travail est d'exposer les propriétés des fonctions caractéristiques des polyèdres convexes entiers, en suivant les idées d'Ishida, et d'en déduire des généralisations du théorème d'Ehrhart (théorèmes 3.1 et 3.2 ci-dessous). Les preuves reposent sur des variantes de la relation d'Euler entre les nombres de faces d'un polytope (lemme 2.1 ci-dessous).

Un problème intéressant mais complètement ouvert, est d'interpréter, en fonction de la géométrie du polytope convexe entier P, les coefficients de l'application polynomiale $i_P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_d n^d$. On sait depuis Ehrhart que $a_0 = 1$; de plus, d est la dimension de P; a_d est la mesure de P, et $2a_{d-1}$ est la mesure du bord de P (voir 3.2 ci-dessous). Mais la signification de $a_1, \ldots, a_{d-2}$ est inconnue.

1. Fonctions caractéristiques

1.1. Polynômes et séries de Laurent

Les notations de cette section seront utilisées dans toute la suite. Soient M un réseau dans un espace vectoriel réel V, de dimension finie d. On note $\mathbf{Z}[M]$ l'algèbre du groupe M sur $\mathbf{Z}$, et $(x^m)_{m \in M}$ sa base canonique: la multiplication dans $\mathbf{Z}[M]$ est définie par $x^m \cdot x^{m'} = x^{m+m'}$. Le choix d'une base $(m_1, \ldots, m_d)$ de M induit un isomorphisme de $\mathbf{Z}[M]$ avec l'anneau des polynômes de Laurent, à coefficients entiers, en les indéterminées $x^{m_1}, \ldots, x^{m_d}$.

On note $\mathbf{Z}[[M]]$ le groupe abélien formé des séries formelles $\sum_{m \in M} a_m x^m$ à coefficients entiers. On définit sur $\mathbf{Z}[[M]]$ une structure de module sur $\mathbf{Z}[M]$, par

$$x^p \cdot \sum_{m \in M} a_m x^m = \sum_{m \in M} a_{m-p} x^m$$

(mais en général, on ne peut définir le produit de deux séries formelles). On peut voir $\mathbf{Z}[[M]]$ comme l'ensemble des séries de Laurent formelles, en d indéterminées.