2.1 Un propriété d'additivité

Puisque

$$1 - x^{m_i} = - x^{m_i}(1 - x^{-m_i}) ,$$

on peut au besoin changer m_i en $-m_i$, et supposer que $\lambda(m_i) > 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors, si $\mathbf{Z}[[M]]_+$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{Z}[[M]]$ formé des séries à support dans le demi-espace ouvert $(\lambda > 0)$, on a: $\varphi(C) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$, donc

$$\varphi(C) \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 - x^{m_i}) \in 1 + \mathbf{Z}[[M]]_+$$

ce qui contredit (1). $\square$

Pour tout cône C, on pose $\Phi(C) = \mathscr{S}(\varphi(C))$; c'est un élément de $S_d^{-1}\mathbf{Z}[M]$.

Définissons un *polyèdre convexe entier P* comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de demi-droites entières, et de points de M; la fonction caractéristique de P est $\varphi(P) = \sum_{m \in P \cap M} x^m$. Nous verrons en 2.2 que $\varphi(P) \in \mathscr{L}_d(M)$, et que sa somme $\mathscr{S}(\varphi(P)) = \Phi(P)$ s'exprime à l'aide des fonctions caractéristiques des cônes tangents aux sommets de P.

2. Identités entre fonctions caractéristiques

2.1 Un propriété d'additivité

Définitions. Le *cône dual* d'un cône C de V est

$$\check{C} = \{\lambda \in V^* \mid \lambda(x) \geqslant 0, \ \forall x \in C\} .$$

$\check{C}$ est un cône convexe polyédral de V^*, rationnel pour le réseau dual M^* de M. De plus, la codimension de $\check{C}$ est la dimension de $C \cap (-C)$, c'est-à-dire du plus grand sous-espace vectoriel contenu dans C. En particulier, C est saillant si et seulement si $\check{C}$ est de dimension d.

Soit C un cône de V, et $(\sigma_i)_{i \in I}$ une subdivision de son cône dual σ; alors $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ où C_i est le cône dual de σ_i. Pour tout $i \in I$, on se donne $f_i \in M$ tel que $f_i \mid \sigma_j = f_j$ quelle que soit la face σ_j de σ_i (on considère f_i comme fonction linéaire sur σ_i). Alors les f_i se recollent en une fonction continue sur σ, linéaire par morceaux, à valeurs entières sur $\sigma \cap M^*$. On dit que f est *convexe* si $f(a) + f(b) \leqslant f(a+b)$ pour tous a, b dans σ; cela signifie que pour tout $m \in V$, l'ensemble

$$A(m) = \{x \in \sigma \mid m(x) < f(x)\}$$

est vide ou convexe.

LEMME. *Soient* C *et* f *comme précédemment. Si* f *est convexe, alors pour tout* $m \in V$:

$$\sum_{i \in I,\, m \in f_i + C_i} (-1)^{\operatorname{codim}(\sigma_i)} = \begin{cases} 1 & si \quad m \in \bigcap_{i \in I} (f_i + C_i) \\ 0 & sinon\,. \end{cases}$$

Démonstration (voisine de [D], p. 564]. On considère les groupes de cohomologie relative $H^n(\sigma, A(m))$ à coefficients rationnels. De la suite exacte longue

$$\cdots \to H^{n-1}\,(A(m)) \to H^n(\sigma, A(m)) \to H^n(\sigma) \mapsto H^n(A(m)) \to \cdots$$

et de la convexité de σ et de $A(m)$, il résulte que $H^n(\sigma, A(m)) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$. De plus

$$0 \to H^0(\sigma, A(m)) \to H^0(\sigma) \xrightarrow{i} H^0(A(m)) \to H^1(\sigma, A(m)) \to 0$$

et i est surjective, donc $H^1(\sigma, A(m)) = 0$. Enfin

$$H^0(\sigma, A(m)) \neq 0 \Leftrightarrow A(m) = \varnothing \Leftrightarrow m \geqslant f \text{ sur } \sigma \Leftrightarrow m \in f + C$$

et

$$H^0(\sigma, A(m)) = \mathbf{Q}$$

dans ce cas. De même, $H^n(\sigma_i, A(m) \cap \sigma_i) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, et tout $i \in I$. Par suite, d'après le théorème de Leray (voir [G], corollaire au théorème 5.2.4) appliqué au recouvrement fermé $\sigma = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$, le groupe $H^n(\sigma, A(m))$ est le n-ième groupe d'homologie du complexe

(2) $$\cdots \to \bigoplus_{\dim(\sigma) = n} H^0(\sigma_i, A(m) \cap \sigma_i) \to \cdots$$

Puisque $H^0(\sigma_i, A(m) \cap \sigma_i)$ est égal à $\mathbf{Q}$ si $m \in f_i + C_i$, et à 0 sinon, l'identité cherchée s'obtient en calculant la caractéristique d'Euler du complexe (2). □

THÉORÈME (Ishida). *Soient* f *et* C *comme précédemment. Si* f *est convexe, alors* $\varphi(\bigcap_{i \in I} (f_i + C_i)) \in \mathscr{L}_d(M)$, *et*

$$\Phi\Big(\bigcap_{i \in I} (f_i + C_i)\Big) = \sum_{i \in I,\, C_i \text{ saillant}} \Phi(f_i + C_i)\,.$$

Démonstration. Montrons que

(3) $$\sum_{i \in I} (-1)^{\operatorname{codim}(\sigma_i)} \varphi(f_i + C_i) = \varphi\Big(\bigcap_{i \in I} (f_i + C_i)\Big)\,.$$

En effet, pour tout $m \in M$, les coefficients de x^m dans les deux membres de (3) sont égaux d'après le lemme. Pour conclure, on remarque que $\varphi(f_i + C_i) = x^{f_i}\varphi(C_i)$, et que $\mathscr{S}(\varphi(C_i)) = 0$ si C_i n'est pas saillant, c'est-à-dire si $\dim(\sigma_i) < d$. $\square$

En prenant $f = 0$, on obtient le

COROLLAIRE. *Pour tout cône* C, *et toute subdivision* $(\sigma_i)_{i \in I}$ *de son cône dual, on a*

$$\Phi(C) = \sum_{i \in I,\, C_i \text{ saillant}} \Phi(C_i)$$

où C_i *est le cône dual de* σ_i.

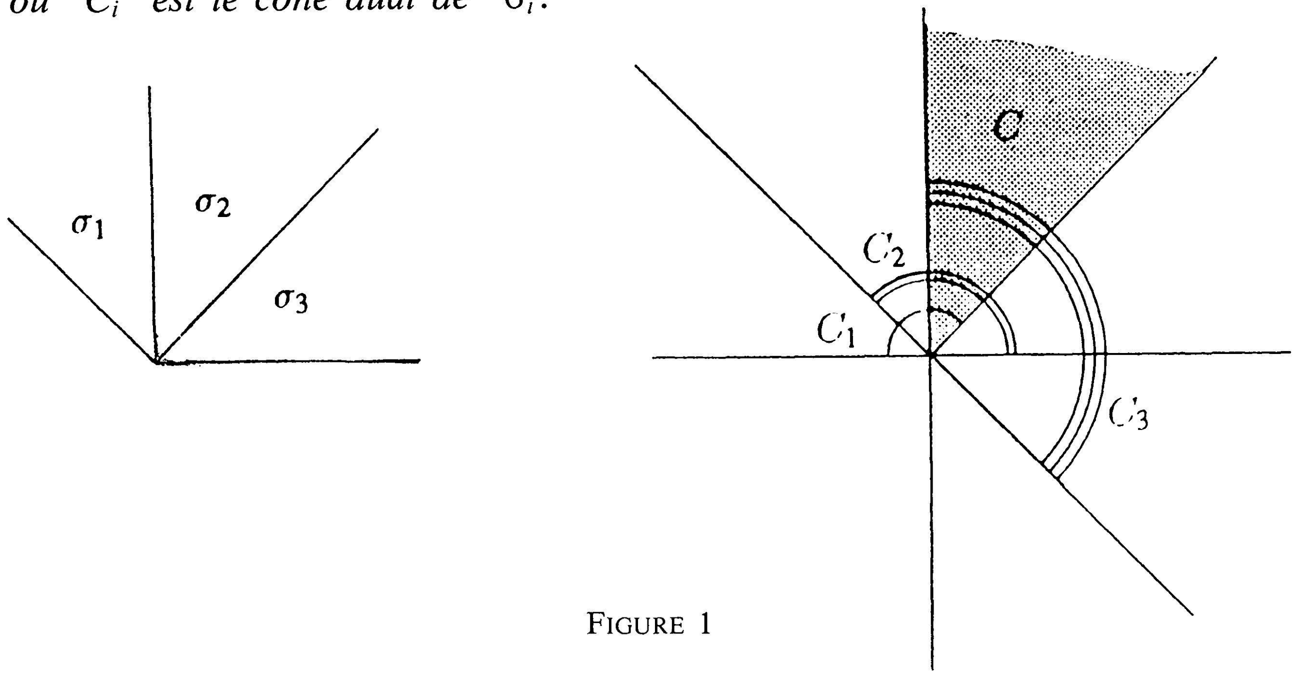

FIGURE 1

Une subdivision du cône dual

2.2. POLYÈDRES ET FONCTIONS D'APPUI

Afin de pouvoir appliquer le résultat qui précède aux fonctions caractéristiques des polyèdres, nous allons rappeler brièvement les liens entre les polyèdres convexes et leur fonction d'appui; pour plus de détails, voir [O], Appendix et [R], §§13 et 19.

Soit P un polyèdre convexe entier dans V; nous allons lui associer une subdivision d'un cône de V^*, et une fonction convexe en 2.1. Définissons la *fonction d'appui* de P par

$$\begin{aligned} f : V^* &\to \{-\infty\} \cup \mathbf{R} \\ x &\mapsto \inf_{p \in P} \; x(p) \,. \end{aligned}$$