

## 2.3. Fonctions caractéristiques de polyèdres ouverts

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Soit  $\sigma$  l'ensemble des  $x \in V^*$  tels que  $f(x) \neq -\infty$ . C'est un cône, et  $f(x) = \min_{s \in \mathcal{E}} x(s)$  pour tout  $x \in \sigma$ , où  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des sommets de  $P$ . Pour toute face  $F$  de  $P$ , on note  $P_F$  l'ensemble des  $t(-f + p)$  où  $f \in F$ ,  $t \in \mathbf{R}_+$  et  $p \in P$ ; c'est un cône, dont on note  $\sigma_F$  le cône dual. Remarquons que  $P_F \cap (-P_F)$  est la direction du sous-espace affine engendré par  $F$ ; en particulier,  $P_F$  est saillant si et seulement si  $F$  se réduit à un sommet. On vérifie sans peine que la famille des  $\sigma_F$ ,  $F$  face de  $P$ , est une subdivision de  $\sigma$ , avec les  $\sigma_s$ ,  $s \in \mathcal{E}$ , comme cônes de dimension maximale. De plus,  $f|_{\sigma_s} = s$  pour tout  $s \in \mathcal{E}$ , et  $P = \bigcap_{s \in \mathcal{E}} (s + P_s)$  si  $P$  ne contient aucune droite.

Réciproquement, soit  $(\sigma_i)_{i \in I}$  une subdivision d'un cône  $\sigma$  de  $V^*$ . Pour tout  $i \in I$ , soit  $f_i \in M$ , tel que  $f_i|_{\sigma_j} = f_j$  si  $\sigma_j$  est une face de  $\sigma_i$ . On suppose que la fonction  $f$ , obtenue par recollement des  $f_i$ , est *strictement convexe*, c'est-à-dire que  $f(a) + f(b) < f(a + b)$  chaque fois que  $a, b$  appartiennent à des cônes distincts de la subdivision. Alors  $P = \bigcap_{i \in I} (f_i + \check{\sigma}_i)$  est un polyèdre convexe entier, ayant pour sommets les  $f_i$  tels que la dimension de  $\sigma_i$  soit maximale, et pour fonction d'appui  $f$ . De 2.1 suit donc le

**THÉORÈME.** *Soient  $P$  un polyèdre convexe entier, et  $\mathcal{E}$  l'ensemble de ses sommets. Alors*

$$\Phi(P) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^s \Phi(P_s)$$

où  $P_s$  est le cône engendré par  $-s + P$ .

### 2.3. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DE POLYÈDRES OUVERTS

Pour tout convexe  $C$  de  $V$ , on note  $\overset{\circ}{C}$  son *intérieur relatif*, c'est-à-dire l'intérieur de  $C$  dans l'espace affine qu'il engendre.

**THÉORÈME.** (i) *Pour tout polyèdre convexe entier  $P$ , on a:  $\varphi(\overset{\circ}{P}) \in \mathcal{L}_d(M)$ , et*

$$\Phi(\overset{\circ}{P}) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^s \Phi(\overset{\circ}{P}_s)$$

avec les notations ci-dessus.

(ii) *Pour tout cône saillant  $C$ , on a:  $\varphi(\overset{\circ}{C}) \in \mathcal{L}_d(M)$ , et*

$$\Phi(\overset{\circ}{C}) = (-1)^{\dim(C)} \Phi(-C)$$

où  $-C$  est le cône opposé à  $C$ .

*Démonstration.* On peut supposer que  $P$  engendre  $V$ . On associe à  $P$  sa fonction d'appui  $f$ , et une subdivision  $(\sigma_i)_{i \in I}$  de  $\sigma$  comme en 2.2. Supposons d'abord que  $P$  est borné; alors  $\sigma = V^*$ . Montrons que

$$(4) \quad \sum_{i \in I} (-1)^{\text{codim}(\sigma_i)} \varphi(f_i - C_i) = (-1)^d \varphi(\overset{\circ}{P}),$$

où on pose  $C_i = \check{\sigma}_i$ . Comme en 2.1, il suffit de montrer que

$$(5) \quad \sum_{i \in I, m \in f_i - C_i} (-1)^{\text{codim}(\sigma_i)} = \begin{cases} (-1)^d & \text{si } m \in \overset{\circ}{P} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose  $B(m) = \{x \in V^* \mid m(x) > f(x)\}$  et on considère les groupes de cohomologie  $H^n(V^*, B(m))$ . Puisque  $f$  est linéaire sur chaque  $\sigma_i$ , l'ensemble  $\sigma_i \cap B(m)$  est vide ou convexe, d'où comme en 2.1:  $H^n(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i) = 0$  pour tout  $n \geq 1$ . Par suite,  $H^n(V^*, B(m))$  est le  $n$ -ième groupe de cohomologie du complexe

$$(6) \quad \cdots \rightarrow \bigoplus_{\dim(\sigma_i) = n} H^0(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i) \rightarrow \cdots$$

De plus,  $H^0(\sigma_i, B(m) \cap \sigma_i)$  est égal à  $\mathbf{Q}$  si  $m \leq f$  sur  $\sigma_i$ , c'est-à-dire si  $m \in f_i - C_i$ ; et à 0 sinon. D'autre part, on a:

$$H^n(V^*, B(m)) = H_c^{d-n}(V^* \setminus B(m))$$

par dualité d'Alexander. De plus, puisque  $V^* \setminus B(m) = \{x \in V^* \mid m(x) \leq f(x)\}$  est un cône convexe fermé de  $V^*$ , on a:  $H_c^i(V^* \setminus B(m)) = 0$  pour tout  $i \geq 0$ , sauf si  $V^* \setminus B(m) = \{0\}$  et  $i = 0$ . D'où  $H^n(V^*, B(m)) = 0$  sauf si  $n = d$  et  $m(x) > f(x)$  pour tout  $x \neq 0$ , c'est-à-dire si  $m \in \overset{\circ}{P}$ . Finalement, la caractéristique d'Euler du complexe (6) est  $(-1)^d$  si  $m \in \overset{\circ}{P}$ , et 0 sinon, d'où (5).

Lorsque  $P$  n'est plus supposé borné, mais ne contient aucune droite, on peut trouver  $x \in V^*$  tel que le polyèdre convexe  $P_t = \{p \in P \mid x(p) \leq t\}$  soit borné, et d'intérieur non vide, pour tout  $t$  assez grand. De plus,  $P_t$  est entier pour une infinité de valeurs positives de  $t$ . En écrivant l'identité (4) pour  $P_t$  et en faisant tendre  $t$  vers  $+\infty$ , on obtient (4) pour  $P$ . En sommant les séries, on en déduit que

$$(-1)^d \Phi(\overset{\circ}{P}) = \sum_{i \in I, C_i \text{ saillant}} \Phi(f_i - C_i) = \sum_{s \in \mathcal{E}} x^s \Phi(-P_s).$$

En particulier, si  $P = C$  est un cône saillant, alors  $\mathcal{E} = \{0\}$  et  $(-1)^d \Phi(\overset{\circ}{C}) = \Phi(-C)$  d'où (ii). L'assertion (i) s'en déduit aussitôt, si  $P$  ne contient aucune

droite. Mais si  $P$  contient une droite, alors  $\overset{\circ}{P} = m + \overset{\circ}{P}$  pour un  $m \in M$ , d'où  $\Phi(\overset{\circ}{P}) = 0$ . D'autre part,  $P$  n'a pas de sommet, donc (i) est triviale dans ce cas.  $\square$

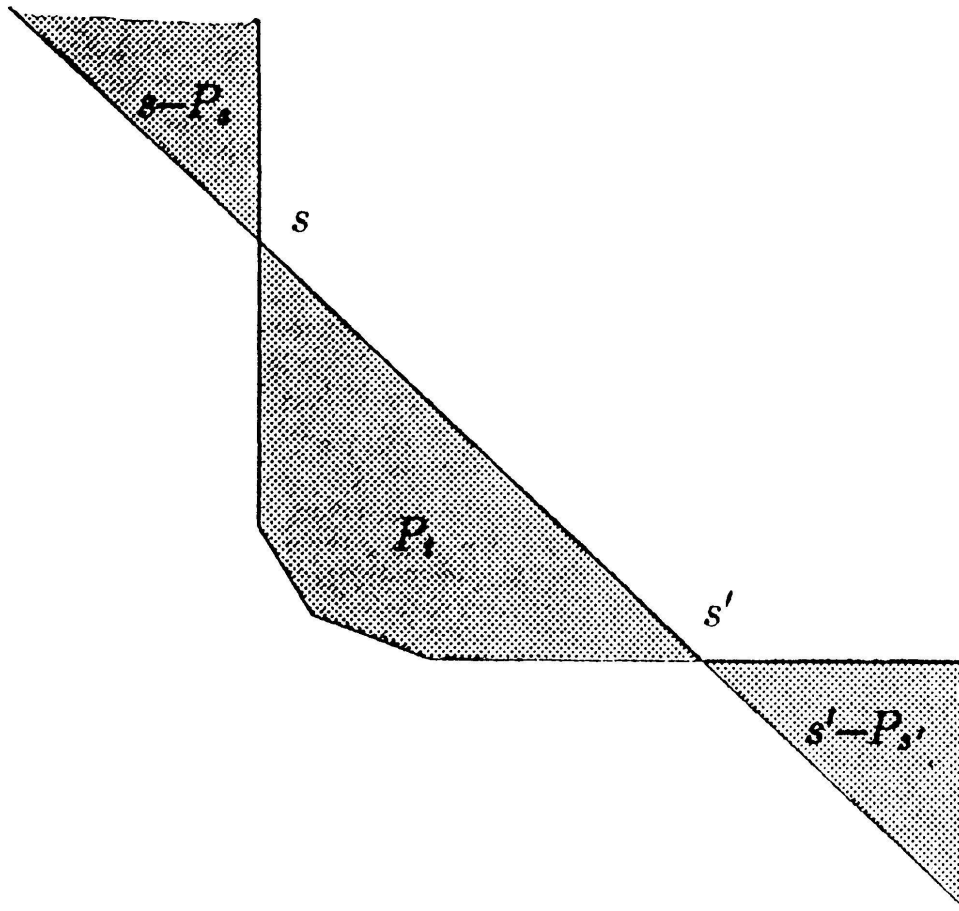


FIGURE 2

De l'identité (ii) et du corollaire 2.1, suit aussitôt le

**COROLLAIRE.** *Pour tout cône  $C$ , et toute subdivision  $(\sigma_i)_{i \in I}$  de son cône dual, on a*

$$\Phi(\overset{\circ}{C}) = \sum_{i \in I, C_i \text{ saillant}} \Phi(\overset{\circ}{C}_i),$$

où  $C_i$  est le cône dual de  $\sigma_i$ .

#### 2.4. FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES PONDÉRÉES

*Définition.* Un poids  $\omega$  est la donnée, pour tout  $m \in V$  et tout cône  $C$ , d'un nombre réel  $\omega(m, C)$ , tel que

$$\omega(m, C) = 0 \text{ si } m \notin C;$$

$$\omega(m, C) \text{ ne dépend que de la face de } m \text{ dans } C;$$

$$\omega(-m, -C) = \omega(m, C).$$