

3. Cas général

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

grand que 1, on a $8b + \pi^2/b > 8 + \pi^2$, car l'équation $8b^2 - (8 + \pi^2)b + \pi^2 = 0$ a deux racines $b = 1$ et $b = \pi^2/8$.

Par ailleurs on a aussi que

$$\begin{aligned} & 2C(t) - C(t-h) - C(t+h) \\ &= 2(C(t) - C(x)) + (C(x) - C(t-h)) + (C(x) - C(t+h)). \end{aligned}$$

Un des trois membres $C(t) - C(x)$, $C(x) - C(t+h)$, $C(x) - C(t-h)$ est donc supérieur à $ca^m/4$. Donc on peut trouver un point x_m tel que $|C(x_m) - C(x)| > ca^m/4$ et $|x_m - x| \leq 3\pi/(2b^m)$.

Soit $\delta \in]0, 1[$. On peut trouver un entier m tel que $3\pi/(2b^m) \leq \delta < 3\pi/(2b^{m-1})$. En se servant de cette dernière inégalité et de l'identité $(1/b)^\alpha = a$, on obtient que $|C(x_m) - C(x)| > ac(2\delta/(3\pi))^\alpha/4$. Pour $\varepsilon = ac(2/(3\pi))^\alpha/4$, le théorème est vérifié.

3. CAS GÉNÉRAL

a) Sans faire d'autre hypothèse sur b que $b > 1/a$, nous démontrons le théorème pour la fonction de Weierstrass $f(x) = C(x)$.

Soient L, N et m des entiers positifs vérifiant

$$b^L < N\pi \quad \text{et} \quad L < m.$$

Nous introduisons la quantité

$$I = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} C(t) \cos b^m t dt$$

où h vaut $N\pi/b^m$.

$$I = a^m + \sum_{n \neq m, n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} + \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m} \right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N.$$

Nous ferons appel aux inégalités $|\sin b^n h| \leq 1$ si $n \geq m - L$ et $|\sin b^n h| \leq b^n h$ si $n < m - L$. On a

$$|I - a^m| \leq \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^n} + \sum_{n \neq m, n=m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{|b^n - b^m| h}.$$

Nous minorons les quantités $|b^m - b^n|$ par la quantité $b^m - b^{m-1}$:

$$\begin{aligned} |I - a^m| &\leq \sum_{n=0}^{m-L-1} \frac{2a^n b^n}{b^m - b^{m-1}} + \sum_{n=m-L}^{\infty} \frac{2a^n}{(b^m - b^{m-1})h} \\ &\leq \frac{2a^{m-L} b^{m-L}}{(ab-1)(b^m - b^{m-1})} + \frac{2a^{m-L}}{(b^m - b^{m-1})(1-a)h}. \end{aligned}$$

On a donc, puisque $b^m h = N\pi > b^L$,

$$|I - a^m| \leq \frac{2a^{m-L} b^{-L}}{(ab-1)(1-1/b)} + \frac{2a^{m-L}}{(1-1/b)(1-a)N\pi} < sa^m$$

avec

$$s = \frac{2a^{-L} b^{-L}}{(ab-1)(1-1/b)} + \frac{2a^{-L}}{(1-1/b)(1-a)b^L}.$$

Il est possible de trouver un entier L suffisamment grand pour que $s < 1$. Si $c = (1-s)/2$, alors $c > 0$ et $I > 2ca^m$.

Remarquons que

$$I = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} [C(t) - C(x)] \cos(b^m t) dt;$$

par suite, il existe au moins une valeur de x_m telle que $|x_m - x| \leq h$ et $|C(x_m) - C(x)| > ca^m$.

Soit $\delta \in]0, 1[$. On peut trouver un nombre entier $m > L$ tel que

$$h = N\pi / b^m \leq \delta < N\pi / b^{m-1}.$$

En se servant de cette dernière égalité et de l'identité $(1/b)^\alpha = \alpha$, on obtient que $|C(x_m) - C(x)| > ac(\delta/(N\pi))^\alpha$. Pour $\varepsilon = ac(1/(N\pi))^\alpha$, le théorème est vérifié.

b) On peut modifier la démonstration précédente pour analyser la fonction $S(x)$. Pour ce faire, on pose

$$J = \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} S(t) \sin b^m t dt;$$

on supposera que h vaut $N\pi/b^m$. On a

$$J = a^m + \sum_{n \neq m, n=0}^{\infty} a^n \left[\frac{\cos(b^n + b^m)x}{b^n + b^m} - \frac{\cos(b^n - b^m)x}{b^n - b^m} \right] \frac{\sin b^n h}{h} (-1)^N$$

Par la suite, toutes les inégalités obtenues relatives aux quantités I se transposent de la même façon relativement aux quantités J et l'on établit le théorème pour la fonction $f = S$.

Remarque. D'une façon générale, pour toute suite de phases ϕ_n , les fonctions $f(x)$ de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(b^n x - \phi_n)$ rempliront la conclusion du théorème si $b > 1/a$.

4. CONCLUSION

Nous avons exposé une démonstration très simple de la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass lorsque $b > 1/a$. Cependant nous n'avons pas complètement égalé la performance de Hardy qui a établi que même dans le cas $b = 1/a$, la fonction de Weierstrass est sans dérivée. Il y aurait lieu de simplifier l'argumentation de Hardy également dans ce cas.

RÉFÉRENCES

- [1] HARDY, G. H. (1916). Weierstrass's non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc.* 17, pp. 301-325.
- [2] WEIERSTRASS, F. (1872). Über kontinuierliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. *Mathematische Werke II*, pp. 71-74.

(Reçu le 22 juillet 1991)

Amar Baouche et Serge Dubuc

Département de mathématiques et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, succ. A
Montréal (P.Q.)
H3C 3J7 Canada