

1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

AN ANALOGUE OF HUBER'S FORMULA
FOR RIEMANN'S ZETA FUNCTION

by Floyd L. WILLIAMS ¹⁾

To the memory of Michio Kuga

1. INTRODUCTION

A remarkable formula of H. Huber [11] relates the class 1 spectrum of a compact Riemann surface X and the spectral zeros of Selberg's zeta function ζ_X of X . More generally, if X is a space form (not necessarily compact) of a rank 1 symmetric space one can still assign to X a Selberg zeta function ζ_X and formulate a generalized version of Huber's formula [6], [18]. Here a decisive role is played by the Selberg trace formula.

On the other hand Weil's explicit sum formula for Riemann's zeta function ζ [16], [17] bears some striking similarity in appearance to the trace formula. It is now known, as a matter of fact, by a recent work of D. Goldfeld [7] that there exists a kernel function on a suitable space such that the conjugacy class sum in Selberg's trace formula is precisely the sum over the primes of Weil's formula; i.e. Weil's formula indeed can be interpreted as a trace formula.

Motivated by a certain "radial" function which occurs in semisimple Lie theory we consider a certain test function which we plug into Weil's formula, and we derive thereby a formula of Huber type for ζ . The formula, see Theorem 7.1, involves a sum over the "spectrum" of ζ — i.e. over its non-trivial zeros. We derive a second interesting formula in Theorem 7.10 by specializing the parameter s in Theorem 7.1.

Although Lie theory and spectral theory serve as a context and motivation, the lecture which is largely self-contained requires no familiarity with these subjects. We assume only a knowledge of basic real and complex analysis.

¹⁾ This is an expanded version of an invited Mathematical Association of America address delivered at the winter San Francisco meeting on January 16, 1991.

The author is thankful for and honored by the invitation extended by the Program Committee of the Mathematical Association of America to deliver this lecture. We dedicate the lecture to the memory of a very great mathematician — a kind and humble man — a friend — Professor Michio Kuga.

2. OUTLINE OF THE LECTURE

- I. Huber's formula (as a context)
- II. Riemann's zeta function — basic facts and the Riemann hypothesis (= RH)
- III. Test functions
- IV. Weil's explicit formula
- V. The Schwartz space and the RH
- VI. The main test function
- VII. An analogue of Huber's formula

I. HUBER'S FORMULA (as a context)

Since Huber's formula provides the motivation for this lecture we shall state (for the record) this remarkable result. Neither the result nor any understanding of it is required for later purposes.

Let G denote the group $SL(2, \mathbf{R})$ of real 2×2 matrices with determinant equal to 1:

$$(1.1) \quad G = SL(2, \mathbf{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} a, b, c, d, \in \mathbf{R} \\ ad - cb = 1 \end{array} \right\}$$

where \mathbf{R} denotes the field of real numbers. Let $\Gamma \subset G$ be a discrete torsionfree¹⁾ subgroup such that the quotient $\Gamma \backslash G$ is compact. Euler's classical gamma function will also be denoted by Γ :

$$(1.2) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \text{Res} > 0.$$

The function $N: \Gamma - \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$ defined by

$$(1.3) \quad N(P) = \max |c|^2, \quad c = \text{an eigenvalue of } P$$

¹⁾ That is, if $\gamma^n = 1$ for $\gamma \in \Gamma$, $n > 0$ an integer, then $\gamma = 1$.