

# 5. Certain Sums in Diophantine Approximation

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 5. CERTAIN SUMS IN DIOPHANTINE APPROXIMATION

Let us agree to write  $\{\theta\}$  for the fractional part of  $\theta$ , namely,  $\theta - [\theta]$ .

One of the earliest appearances of real numbers with bounded partial quotients is in the theory of Diophantine approximation.

For example, consider the sum

$$s'_n(\theta) = \sum_{1 \leq k \leq n} \left( \{k\theta\} - \frac{1}{2} \right).$$

Clearly  $s'_n(\theta) = O(n)$ ; but Lerch proved in 1904 that if  $\theta$  has bounded partial quotients, we have  $s'_n(\theta) = O(\log n)$ . See [184]. (This result was also announced by Hardy and Littlewood in 1912; see [128].)

At the International Congress of Mathematicians in 1912, Hardy and Littlewood [128] announced several theorems on Diophantine approximation, some of which relate to the subject at hand. For example, they defined

$$s_n(\theta) = \sum_{1 \leq k \leq n} e^{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \pi i \theta},$$

and stated that if  $\theta$  has bounded partial quotients, then  $s_n(\theta) = O(\sqrt{n})$ . The proof appeared later; see [130].

At the same Congress, Hardy and Littlewood announced that

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \left( \{k\theta\} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{n}{12} + O(1),$$

for all irrational  $\theta$ . This is incorrect, and the correct formulation was stated in a 1922 paper: the result holds for many, but not all irrationals, and in particular it holds for  $\theta$  with bounded partial quotients. See [132] for the statement and [133] for a proof.

Hardy and Littlewood also examined other series of interest. They defined:

$$U_n(\theta) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{k \sin k\pi\theta},$$

$$V_n(\theta) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{(-1)^k}{\sin k\pi\theta},$$

and

$$W_n(\theta) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{(\sin k\pi\theta)^2}.$$

They showed that if  $\theta$  has bounded partial quotients, then  $U_n(\theta) = O(\log n)$ ,  $V_n(\theta) = O(n)$ , and  $W_n(\theta) = O(n^2)$ . See [134].

(Warning to the reader: in their papers, Hardy and Littlewood used the notation  $\{x\}$  to mean  $x - [x] - \frac{1}{2}$ , not  $x - [x]$ , as is more standard today.)

For other related papers, see Hardy and Littlewood [129, 131]; the collected works of Hardy [127]; Ostrowski [230]; Khintchine [161]; Oppenheim [228]; Chowla [53, 54]; Walfisz [298, 299, 300], and Schoissengeier [314].

Others researchers have examined similar sums in connection with numbers with bounded partial quotients. See the papers of Faĭziev [104] Ivanov [151], and Schoissengeier [274].

### 6. FRACTAL GEOMETRY

Numbers with bounded partial quotients provided an early example of a set with non-integral Hausdorff dimension.

Let  $\dim S$  denote the Hausdorff dimension of the set  $S$  (for a definition, see, e.g. Falconer [103]). We use the definitions of  $\mathcal{E}$  and  $\mathcal{E}_k$  from section 1.

In 1928, Jarník [152] proved that  $\dim \mathcal{E} = 1$ ,

$$\frac{1}{4} < \dim \mathcal{E}_2 < 1,$$

and

$$1 - \frac{4}{k \log 2} < \dim \mathcal{E}_k < 1 - \frac{1}{8k \log k},$$

for  $k > 8$ . An exposition of Jarník's work can be found in Rogers [263].

In 1941, Good proved the following result [118]:

$$\dim \mathcal{E}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{k,n},$$

where  $\sigma = \sigma_{k,n}$  is the real root of the equation

$$\sum_{1 \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq k} Q(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-2\sigma} = 1$$

and  $Q(\ )$  denotes Euler's continuant polynomial. (These are multivariate polynomials, defined by  $Q(\ ) = 1$ ,  $Q(a_1) = a_1$ , and

$$Q(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_n Q(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) + Q(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$$

for  $n \geq 2$ .)