

11. Properties of the sequence $n \pmod{1}$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

number. It follows from the results of Kmošek and Shallit cited above that $Z(2^{2^k-1}) \leq 2$ for all $k \geq 0$.

Borosh and Niederreiter [42] showed that $Z(2^k) \leq 3$ for $6 \leq k \leq 35$.

More recently, Niederreiter [223] proved that Zaremba's conjecture holds for all powers of 2; in fact, we have $Z(2^k) \leq 3$ for all $k \geq 0$.

Larcher [182, Corollary 2] proved the existence of a constant c , such that for every $n \geq 1$ there exists a positive integer $j \leq n$, relatively prime to n , such that if

$$j/n = [0, a_1, a_2, \dots, a_m],$$

then

$$\sum_{1 \leq i \leq m} a_i < c(\log n) (\log \log n)^2.$$

This is close to the best possible bound $O(\log n)$, which was reportedly conjectured by L. Moser (although I do not know a reference); the bound would be a consequence of Zaremba's conjecture.

For other results connected with Zaremba's conjecture, see the papers of Cusick [63, 66]; Niederreiter [224]; Sander [268]; and Hensley [315].

11. PROPERTIES OF THE SEQUENCE $n\theta \pmod{1}$

If θ is a real number, by $\theta \pmod{1}$ we mean $\{\theta\} = \theta - [\theta]$, the fractional part of θ .

It has been known at least since Bernoulli [26] that properties of the sequence $\theta, 2\theta, 3\theta, \dots$ are intimately connected with the continued fraction expansion for θ . The distribution of $n\theta \pmod{1}$ is a vast subject, and we restrict ourselves to mentioning several results connected with numbers of constant type.

Let θ be an irrational number, and let

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} = 1$$

be the sequence of points $\{k\theta\}$, $1 \leq k \leq n$, arranged in ascending order. Define

$$\delta_\theta(n) = \max_{1 \leq i \leq n+1} a_i - a_{i-1}.$$

Then Graham and van Lint [119] proved the following theorem:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n\delta_\theta(n) < \infty$$

if and only if θ is a number of constant type.

Boyd and Steele [43] introduced the function $l_n^+(\theta)$, the length of the longest increasing subsequence of $\{\theta\}, \{2\theta\}, \dots, \{n\theta\}$. They proved that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n^+(\theta)}{\sqrt{n}} > 0$$

and

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n^+(\theta)}{\sqrt{n}} < \infty$$

if and only if the partial quotients of θ are bounded.

For some other results on $\{n\theta\}$ connected with bounded partial quotients, see Ennola [100, 101]; Lesca [185]; Drobot [92]; and Strauch [288].

12. DISCREPANCY AND DISPERSION

Let $\omega = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ be a sequence of real numbers. Let $I \subseteq [0, 1)$ be an interval and let $|I|$ denote its length. Define the counting function $S_n(I) = S_n(I, \omega)$ as the number of terms $x_k, 1 \leq k \leq n$, for which $\{x_k\} \in I$.

The *discrepancy* $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is a measure of how much the sequence x_1, x_2, \dots, x_n deviates from a uniform distribution. It is defined as follows:

$$D_n(\omega) = D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sup_{I \subseteq [0, 1)} \left| \frac{S_n(I, \omega)}{n} - |I| \right|.$$

Now consider the discrepancy of the sequence $\omega = (\theta, 2\theta, 3\theta, \dots)$. If θ has bounded partial quotients, then the discrepancy of ω is small. In particular, we have the following estimate: If $K(\theta) \leq k$, then

$$nD_n(\omega) \leq 3 + \left(\frac{1}{\log \alpha} + \frac{k}{\log(k+1)} \right) \log n$$

for $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. See, for example, Kuipers and Niederreiter [173].