

# 12. Discrepancy and Dispersion

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Then Graham and van Lint [119] proved the following theorem:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} n\delta_\theta(n) < \infty$$

if and only if  $\theta$  is a number of constant type.

Boyd and Steele [43] introduced the function  $l_n^+(\theta)$ , the length of the longest increasing subsequence of  $\{\theta\}, \{2\theta\}, \dots, \{n\theta\}$ . They proved that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n^+(\theta)}{\sqrt{n}} > 0$$

and

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n^+(\theta)}{\sqrt{n}} < \infty$$

if and only if the partial quotients of  $\theta$  are bounded.

For some other results on  $\{n\theta\}$  connected with bounded partial quotients, see Ennola [100, 101]; Lesca [185]; Drobot [92]; and Strauch [288].

## 12. DISCREPANCY AND DISPERSION

Let  $\omega = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  be a sequence of real numbers. Let  $I \subseteq [0, 1)$  be an interval and let  $|I|$  denote its length. Define the counting function  $S_n(I) = S_n(I, \omega)$  as the number of terms  $x_k, 1 \leq k \leq n$ , for which  $\{x_k\} \in I$ .

The *discrepancy*  $D_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  is a measure of how much the sequence  $x_1, x_2, \dots, x_n$  deviates from a uniform distribution. It is defined as follows:

$$D_n(\omega) = D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sup_{I \subseteq [0, 1)} \left| \frac{S_n(I, \omega)}{n} - |I| \right|.$$

Now consider the discrepancy of the sequence  $\omega = (\theta, 2\theta, 3\theta, \dots)$ . If  $\theta$  has bounded partial quotients, then the discrepancy of  $\omega$  is small. In particular, we have the following estimate: If  $K(\theta) \leq k$ , then

$$nD_n(\omega) \leq 3 + \left( \frac{1}{\log \alpha} + \frac{k}{\log(k+1)} \right) \log n$$

for  $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ . See, for example, Kuipers and Niederreiter [173].

For other results connecting discrepancy and the boundedness of the partial quotients, see the papers of Niederreiter [218] and Dupain and Sós [94, 95]. Also see Beck and Chen [25] and Richert [258].

We can also consider the so-called  $L^2$  discrepancy,  $T_n$ , defined as follows: let

$$R_n(t) = \frac{S_n([0, t), \omega)}{n} - t$$

and put

$$T_n(\omega) = \left( \int_0^1 R_n^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

It is possible to generalize the definitions of  $D_n$  and  $T_n$  to the multi-dimensional case, though we omit the details. By appealing to numbers with bounded partial quotients, Davenport [73] constructed sequences in two dimensions with low  $L^2$  discrepancy. Also see Proinov [250, 251, 252].

Another measure connected with sequences is called *dispersion*. Let  $\omega = (x_1, x_2, \dots)$  and define the dispersion

$$d_n(\omega) = \sup_{x \in [0, 1]} \min_{1 \leq k \leq n} |x - x_k|,$$

essentially half the distance between the most widely separated points of the sequence  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . (Compare with the function  $\delta_\theta(n)$  in Section 11.)

Niederreiter [221] considered the dispersion of the sequence  $\{n\theta\}$ . He showed that if  $\theta$  has bounded partial quotients, then  $d_n(\omega) = O(1/n)$ . He also gave a more detailed estimate, showing that  $d_n(\omega)$  is approximately  $K(\theta)/4n$ . Also see Drobot [93] and Larcher [311].

### 13. CONNECTIONS WITH ERGODIC THEORY

Let  $\theta$  be irrational,  $\omega = (\theta, 2\theta, \dots)$  and  $S_n(I, \omega)$  be defined as in the previous section. Veech [293] developed connections between  $S_n$  and ergodic theory. We mention one result that is number-theoretic in nature. Let  $x_n = S_n(I, \omega) \bmod 2$ , and define

$$\mu_\theta(I) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} x_k,$$