

# §1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN

par Pierre KAPLAN et Philip A. LEONARD

### § 1. INTRODUCTION

Le problème d'Eisenstein [1] dont il sera question ici est la détermination des entiers positifs  $D \equiv 5 \pmod{8}$  tels que l'équation

$$(1.1) \quad X^2 - DY^2 = 4$$

a des solutions impaires. Si l'équation

$$(1.2) \quad T^2 - DU^2 = -4$$

a des solutions entières, les longueurs  $l_0$  et  $l_0^*$  des périodes des développements en fraction continue de  $\sqrt{D}$  et  $(1 + \sqrt{D})/2$  respectivement sont des nombres impairs et l'on sait ([6]) que, alors, (1.1) a des solutions impaires si, et seulement si,

$$(1.3) \quad l_0 \equiv l_0^* \pmod{4} .$$

Récemment Y. Mimura ([9]) a eu l'idée très intéressante et originale d'introduire le développement négatif en fraction continue de nombres irrationnels quadratiques réels et les périodes de ceux qui sont négativement réduits pour montrer que l'équation (1.1) a des solutions impaires si, et seulement si,

$$(1.4) \quad l_{0-} = 3l_{0-}^* + \frac{l_0^*}{k}$$

où  $l_{0-}$  et  $l_{0-}^*$  sont les longueurs des périodes négatives de  $\sqrt{D}$  et  $(1 + \sqrt{D})/2$  respectivement, et  $k = 1$  ou  $2$  suivant que (1.2) a, ou non, des solutions.

En fait, la condition (1.3) avait été généralisée et pouvait être remplacée ([4]) par

$$(1.5) \quad l \equiv l^* \pmod{4}$$

où  $l$  est la longueur de la période d'une classe ambige de discriminant  $4D$  et  $l^*$  celle de son image par l'homomorphisme  $\theta$  du groupe des classes de discriminant  $4D$  sur le groupe des classes de discriminant  $D$  défini dans [7]. La définition de  $\theta$  est rappelée ci-dessous (Lemme 4).

Le but de ce travail est de montrer comment la méthode de [7], c'est-à-dire l'utilisation des idéaux des anneaux  $O_D$  et  $O_{4D}$ , permet de généraliser la condition (1.4) de manière analogue à (1.5), et ceci tout en mettant bien en évidence l'intérêt du développement négatif en fraction continue introduit par Mimura [9]. Nous prouvons le résultat suivant:

**THÉORÈME 1.** *Soit  $D$  un nombre positif, congru à 5 modulo 8. Soit  $C$  une classe d'idéaux au sens strict de l'ordre  $O_{4D}$  et  $\theta(C)$  son image par l'homomorphisme  $\theta$ . Soit  $l_-$  (respectivement  $l_-^*$ ) le nombre des idéaux primitifs négativement réduits de  $C$  (respectivement de  $\theta(C)$ ) et  $l^*$  le nombre des idéaux primitifs réduits de  $\theta(C)$ . Alors l'équation (1.1) a des solutions impaires si, et seulement si,*

$$(1.6) \quad l_- = 3l_-^* + l^* .$$

Dans la section suivante (§2) nous allons rappeler ou définir les notions intervenant dans l'énoncé du Théorème 1 et exposer la théorie des idéaux négativement réduits et de leurs périodes, pour laquelle il ne semble pas exister de référence accessible.

Dans la troisième section nous prouvons le Théorème 1 après avoir prouvé deux résultats (Théorèmes 2 et 3) permettant de relier les nombres des idéaux primitifs négativement réduits de  $O_{4D}$  et  $O_D$  avec le nombre des idéaux primitifs réduits de  $O_D$ .

Nous terminons en donnant des exemples numériques (§4).

## §2. CLASSES D'IDÉAUX AU SENS STRICT ET RÉDUCTION NÉGATIVE

Soit  $\Delta > 0$  un discriminant. Il existe un discriminant fondamental  $D_0$  et un entier  $f$  positif tels que  $\Delta = D_0 f^2$ . Soit  $O_{D_0}$  l'anneau des entiers de  $Q(\sqrt{D_0})$  et  $O_\Delta$  l'anneau des entiers de conducteur  $f$ . Les *idéaux primitifs* de

l'anneau  $O_\Delta$  sont les  $\mathbf{Z}$ -modules  $I = \left[ a, \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2} \right]$  tels que

$$(2.1) \quad a > 0, \quad \frac{b^2 - \Delta}{4a} = c \in \mathbf{Z}, \quad (a, b, c) = 1,$$

c'est-à-dire  $I = a[1, \varphi]$  où  $\varphi = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  est déterminé modulo 1 et vérifie (2.1).