§1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 39 (1993), p. 195-210

IDÉAUX NÉGATIVEMENT RÉDUITS D'UN CORPS QUADRATIQUE RÉEL ET UN PROBLÈME D'EISENSTEIN

par Pierre KAPLAN et Philip A. LEONARD

§ 1. INTRODUCTION

Le problème d'Eisenstein [1] dont il sera question ici est la détermination des entiers positifs $D \equiv 5 \pmod 8$ tels que l'équation

$$X^2 - DY^2 = 4 \tag{1.1}$$

a des solutions impaires. Si l'équation

$$T^2 - DU^2 = -4 \tag{1.2}$$

a des solutions entières, les longueurs l_0 et l_0^* des périodes des développements en fraction continue de $\sqrt{D}$ et $(1 + \sqrt{D})/2$ respectivement sont des nombres impairs et l'on sait ([6]) que, alors, (1.1) a des solutions impaires si, et seulement si,

$$l_0 \equiv l_0^* \pmod 4 . \tag{1.3}$$

Récemment Y. Mimura ([9]) a eu l'idée très intéressante et originale d'introduire le développement négatif en fraction continue de nombres irrationnels quadratiques réels et les périodes de ceux qui sont négativement réduits pour montrer que l'équation (1.1) a des solutions impaires si, et seulement si,

$$l_{0-} = 3l_{0-}^* + \frac{l_0^*}{k} \tag{1.4}$$

où l_{0-} et l_{0-}^* sont les longueurs des périodes négatives de $\sqrt{D}$ et $(1 + \sqrt{D})/2$ respectivement, et $k = 1$ ou 2 suivant que (1.2) a, ou non, des solutions.

En fait, la condition (1.3) avait été généralisée et pouvait être remplacée ([4]) par

$$l \equiv l^* \pmod 4 \tag{1.5}$$

où l est la longueur de la période d'une classe ambige de discriminant $4D$ et l^* celle de son image par l'homomorphisme θ du groupe des classes de discriminant $4D$ sur le groupe des classes de discriminant D défini dans [7]. La définition de θ est rappelée ci-dessous (Lemme 4).

Le but de ce travail est de montrer comment la méthode de [7], c'est-à-dire l'utilisation des idéaux des anneaux O_D et O_{4D}, permet de généraliser la condition (1.4) de manière analogue à (1.5), et ceci tout en mettant bien en évidence l'intérêt du développement négatif en fraction continue introduit par Mimura [9]. Nous prouvons le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit* D *un nombre positif, congru à* 5 *modulo* 8. *Soit* C *une classe d'idéaux* **au sens strict** *de l'ordre* O_{4D} *et* $\theta(C)$ *son image par l'homomorphisme* θ. *Soit* l_- *(respectivement* l_-^**) le nombre des idéaux primitifs négativement réduits de* C *(respectivement de* $\theta(C)$*) et* l^* *le nombre des idéaux primitifs réduits de* $\theta(C)$. *Alors l'équation* (1.1) *a des solutions impaires si, et seulement si,*

$$l_- = 3l_-^* + l^* . \tag{1.6}$$

Dans la section suivante (§2) nous allons rappeler ou définir les notions intervenant dans l'énoncé du Théorème 1 et exposer la théorie des idéaux négativement réduits et de leurs périodes, pour laquelle il ne semble pas exister de référence accessible.

Dans la troisième section nous prouvons le Théorème 1 après avoir prouvé deux résultats (Théorèmes 2 et 3) permettant de relier les nombres des idéaux primitifs négativement réduits de O_{4D} et O_D avec le nombre des idéaux primitifs réduits de O_D.

Nous terminons en donnant des exemples numériques (§4).

§2. CLASSES D'IDÉAUX AU SENS STRICT ET RÉDUCTION NÉGATIVE

Soit $\Delta > 0$ un discriminant. Il existe un discriminant fondamental D_0 et un entier f positif tels que $\Delta = D_0 f^2$. Soit O_{D_0} l'anneau des entiers de $Q(\sqrt{D_0})$ et O_Δ l'anneau des entiers de conducteur f. Les *idéaux primitifs* de l'anneau O_Δ sont les $\mathbf{Z}$-modules $I = \left[a, \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2}\right]$ tels que

$$a > 0 , \quad \frac{b^2 - \Delta}{4a} = c \in \mathbf{Z} , \quad (a, b, c) = 1 , \tag{2.1}$$

c'est-à-dire $I = a[1, \varphi]$ où $\varphi = \dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ est déterminé modulo 1 et vérifie (2.1).