

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: COMBINATOIRE ET TYPE TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS
POLYNOMIALES DE C^2 DANS C
Autor: Artal-Bartolo, Enrique
Kapitel: §1. Introduction
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60423>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 22.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

COMBINATOIRE ET TYPE TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS POLYNOMIALES DE \mathbf{C}^2 DANS \mathbf{C}

par Enrique ARTAL-BARTOLO

§ 1. INTRODUCTION

Nous étudions dans cet article des problèmes liés à la classification topologique des applications polynomiales et des courbes affines planes. Nous allons décrire un invariant combinatoire des applications polynomiales $\mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$. Nous utilisons ces résultats pour répondre négativement à une conjecture qui se trouve dans [Neumann 2] qui affirme que le type topologique des courbes affines planes non singulières est déterminé par leur entrelacs à l'infini. Nous commençons par donner des définitions et préciser les problèmes et les résultats.

Considérons $\mathbf{C}[X, Y]$ muni de la relation d'équivalence définie comme suit: Soient $f, g \in \mathbf{C}[X, Y]$; on note $f, g: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ les applications polynomiales qu'ils définissent. Nous disons que f et g sont topologiquement conjugués, noté $f \sim g$, s'il existe des homéomorphismes $\psi: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ et $\varphi: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ tels que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbf{C}^2 \\ f \downarrow & & g \downarrow \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{C} . \end{array}$$

De la même façon, soient C_1, C_2 deux courbes affines planes, i.e, il existe $f, g \in \mathbf{C}[X, Y]$ tels que $C_1 = f^{-1}(0)$ et $C_2 = g^{-1}(0)$. Nous disons que les deux courbes sont topologiquement équivalentes s'il existe un homéomorphisme $\psi: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ tel que $\psi(C_1) = C_2$.

Nous rappelons la définition d'entrelacs à l'infini d'une courbe affine plane, qu'on trouve dans [Neumann-Rudolph]. Pour $R > 0$,

nous notons $S_R^3 := \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = R^2\}$. Soient $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ et $C := f^{-1}(0)$. Pour $R > 0$ suffisamment grand, la courbe C (de codimension réelle 2 dans \mathbf{C}^2) intersecte transversalement S_R^3 ; par conséquent $K_R^C := C \cap S_R^3$ est une sous-variété compacte orientée sans bord de codimension 2 dans S_R^3 . C'est-à-dire, il s'agit d'un entrelacs dans S_R^3 qui est une sphère de dimension 3. Par transversalité, le type topologique du couple (S_R^3, K_R^C) ne dépend pas de R (s'il est suffisamment grand):

1.1. DÉFINITION. [Neumann-Rudolph]. *Soient $f \in \mathbf{C}[X, Y]$, $C := f^{-1}(0)$ et R comme ci-dessus. On dit que (S^3, K_C) est l'entrelacs à l'infini de la courbe C , s'il a le même type topologique que (S_R^3, K_R^C) .*

Il est démontré dans [Neumann-Rudolph] que deux courbes topologiquement équivalentes possèdent des entrelacs à l'infini topologiquement équivalents; ils démontrent aussi que la *sphère ronde* S_R^3 peut être remplacée par des sphères de dimension 3 suffisamment grandes, *plongées raisonnablement* dans \mathbf{C}^2 , sans changer le type topologique de l'entrelacs obtenu par l'intersection avec la courbe C .

Les entrelacs à l'infini des courbes affines planes sont des entrelacs toriques itérés, voir [Neumann-Rudolph], et sont codés par un graphe pondéré, voir [Eisenbud-Neumann].

Aux applications polynomiales $f: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ sont associées des fibrations \mathcal{C}^∞ localement triviales:

1.2. THÉORÈME [Thom]. *Soit $f: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ une application polynomiale. Alors, il existe un ensemble fini $S \subset \mathbf{C}$ tel que la restriction $f|: \mathbf{C}^2 \setminus f^{-1}(S) \rightarrow \mathbf{C} \setminus S$ est une fibration différentiable localement triviale.*

Le théorème de Thom est valable en toute dimension. Nous noterons $S := S(f)$ l'ensemble minimal pour lequel la conclusion du théorème est vraie.

1.3. DÉFINITION. *Soit $c \in \mathbf{C} \setminus S$; on dit que $f^{-1}(c) \subset \mathbf{C}^2$ est une fibre générique de f . Le type topologique du plongement $f^{-1}(c) \subset \mathbf{C}^2$ ne dépend pas de $c \in \mathbf{C} \setminus S$, à cause du théorème (1.2).*

Le problème de la classification topologique des courbes affines planes a été partiellement résolu dans [Neumann2]: Deux courbes *génériques* sont topologiquement équivalentes si elles possèdent des entrelacs à l'infini homéomorphes. Une courbe C est *générique* s'il existe $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ tel que $C = f^{-1}(0)$ est une fibre générique de f . Les courbes génériques sont lisses,

mais il existe des courbes lisses qui ne sont pas génériques; nous en verrons des exemples. W.D. Neumann conjecture que le résultat reste vrai si l'on suppose seulement que C est lisse. Nous donnons dans cet article des exemples de courbes lisses ayant le même entrelacs à l'infini qui ne sont pas topologiquement équivalentes.

L'autre problème traité dans cet article est celui de donner des invariants combinatoires pour les classes d'équivalence de la relation \sim définie ci-dessus. Par des raisons techniques nous allons restreindre l'étude des invariants combinatoires aux polynômes à singularités isolées, i.e., aux $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ tels que il n'y a pas de facteur carré dans la décomposition en facteurs irréductibles de $f(X, Y) - t, \forall t \in \mathbf{C}$.

L'idée clé est la suivante: nous essayons de décrire de façon combinatoire l'ensemble minimal $S(f)$ de (1.2) aussi bien que la fibration $f|_1$. Pour ce faire, nous allons associer à chaque polynôme une courbe projective plane C_f comme suit:

L'ensemble $S(f)$ minimal est décrit dans [Lê-Há]. Nous en rappelons l'essentiel dans la section §2. Nous considérons \mathbf{C}^2 plongé dans \mathbf{P}^2 . Pour chaque $s \in S(f)$, soit C_s l'adhérence de $f^{-1}(s)$ dans \mathbf{P}^2 . Alors la courbe C_f associée à f est la courbe projective plane dont les composantes irréductibles sont: la droite à l'infini, l'adhérence d'une fibre générique et les courbes C_s pour $s \in S(f)$. La résolution des singularités de C_f fournit un graphe pondéré qui contient des renseignements sur la fibration associée à f ; la *combinatoire* de f est la donnée de ce graphe pondéré (modulo une relation d'équivalence basée sur le *plumbing calculus* de [Neumann1]). Des résultats de [Neumann2] et [Fourrier] incitaient à penser que cette *combinatoire* peut être un invariant complet du type topologique de f . Nous allons démontrer que ce n'est pas le cas.

Dans la section suivante, nous allons énoncer les résultats de [Neumann2] et [Fourrier] qui ont inspiré ce travail. Nous rappelons aussi le résultat de [Lê-Há] qui précise (1.2).

La section §3 sert à décrire proprement la combinatoire d'un polynôme; nous énoncerons aussi le résultat qui affirme que la combinatoire n'est pas un invariant complet pour le type topologique des applications polynomiales, dont la démonstration sera donnée dans la section §2.

Dans la section §4, nous énonçons des résultats qui se trouvent dans [Artal] sur les couples de Zariski de courbes projectives planes. Cette section finira avec le contre-exemple à la conjecture de Neumann.