Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1993)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE VERSION NON COMMUTATIVE DES ALGÈBRES DE LIE: LES ALGÈBRES DE LEIBNIZ

Autor: Loday, Jean-Louis

Kapitel: 5. Algèbre enveloppante (cf. [L-P]).

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-60428

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Il est clair que pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ le noyau $\mathfrak{g}^{\mathrm{ann}}$ (*cf.* 2.1) est une représentation de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$. C'est une représentation antisymétrique.

Une représentation M de $\mathfrak{g}$ est dite *triviale* si elle est à la fois symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire

$$[x, m] = 0 = [m, x] \quad \text{pour tout} \quad m \in M, x \in \mathfrak{g} .$$

4.4. *Coreprésentations.* Dans l'analogie avec les algèbres associatives, les représentations sont l'analogue des modules à droite (voir ci-dessous thm 5.2). La notion duale, c'est-à-dire l'analogue des modules à gauche, est celle de coreprésentation.

Par définition une *coreprésentation* N de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est la donnée d'un k-module et de deux actions $[-\,,-]: \mathfrak{g} \times N \to N$ et $[-\,,-]: N \times \mathfrak{g} \to N$ vérifiant les axiomes suivants

$$(MLL)' \qquad [[x, y], m] = [x, [y, m]] - [y, [x, m]]$$

$$(LML)' \qquad [[y, [m, x]] = [[y, m], x] - [m, [x, y]]$$

$$(LLM)' \qquad [[m, x], y] = [m, [x, y]] - [[y, m], x] ,$$

pour tout $m \in N$ et tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

Notons que les deux dernières relations impliquent la relation

$$(ZD)' \qquad [y, [m, x]] + [[m, x], y] = 0 .$$

Il est clair que toute représentation d'une algèbre de Lie définit à la fois une représentation et une coreprésentation au sens des algèbres de Leibniz.

Le *produit tensoriel* d'une coreprésentation N et d'une représentation M est le quotient de $N \otimes_k M$ par les relations

$$[n, x] \otimes m \sim n \otimes [x, m] \quad \text{et} \quad [x, n] \otimes m \sim n \otimes [m, x]$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}, n \in N$ et $m \in M$.

5. Algèbre enveloppante (*cf.* [L-P]).

La catégorie des représentations d'une algèbre de Leibniz donnée $\mathfrak{g}$ est une catégorie abéliennne. Il est naturel d'essayer de la représenter comme une catégorie de modules sur une certaine algèbre, appelée algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

On construit cette algèbre enveloppante de la façon suivante. Considérons deux copies de $\mathfrak{g}$ notées $\mathfrak{g}^l$ et $\mathfrak{g}^r$ pour les différencier. Les éléments de $\mathfrak{g}^l$ sont notés l_x, ceux de $\mathfrak{g}^r$ sont notés r_x, pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Rappelons que pour tout k-module V, $T(V)$ désigne l'algèbre tensorielle $k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots$, qui est associative et unitaire. Dans $T(\mathfrak{g}^l \oplus \mathfrak{g}^r)$ on considère l'idéal bilatère I engendré par les éléments

$$\begin{cases} \text{(i)} & r_{[x,y]} - (r_x r_y - r_y r_x) \\ \text{(ii)} & l_{[x,y]} - (l_x r_y - r_y l_x) \\ \text{(iii)} & (r_y + l_y) l_x \end{cases}$$

pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$.

5.1. Par définition l'*algèbre enveloppante* $UL(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ est le quotient

$$UL(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g}^l \oplus \mathfrak{g}^r)/I .$$

5.2. THÉORÈME (*cf.* [L-P]). *La catégorie des représentations (resp. coreprésentations) de l'algèbre de Leibniz* $\mathfrak{g}$ *est équivalente à la catégorie des modules à droite (resp. à gauche) sur* $UL(\mathfrak{g})$.

Il existe plusieurs homomorphismes permettant de comparer $UL(\mathfrak{g})$ à l'algèbre enveloppante, au sens des algèbres de Lie, de $\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}$. Tout d'abord les homomorphismes d'algèbres $d_0, d_1 \colon UL(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}})$ induits par

$$\begin{cases} d_0(l_x) = 0 \\ d_0(r_x) = \bar{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1(l_x) = -\bar{x} \\ d_1(r_x) = \bar{x} \end{cases}$$

sont bien définis, puis, dans l'autre sens, l'homomorphisme $s_0 \colon U(\mathfrak{g}_{\mathrm{Lie}}) \to UL(\mathfrak{g})$, induit par $s_0(\bar{x}) = r_x$.

5.3. PROPOSITION (*cf.* [L-P]). *Les homomorphismes* d_0, d_1, s_0 *ci-dessus vérifient*

$$d_0 s_0 = d_1 s_0 = \mathrm{id} \quad \textit{et} \quad (\operatorname{Ker} d_1)(\operatorname{Ker} d_0) = 0 .$$

5.4. *Exemple.* Soit $V = k \,.\, x$ un module libre de rang 1 sur k engendré par x. L'algèbre de Leibniz libre $\mathscr{L}(V)$ est isomorphe à $k \,.\, x \oplus k \,.\, x^2 \oplus \cdots \oplus k \,.\, x^n \oplus \cdots$ équipé du crochet

$$\begin{cases} [x, x^i] = x^{i+1} \\ [x^j, x^i] = 0 \quad \text{si } j > 1 . \end{cases}$$

Notons que $\mathscr{L}(V)_{\mathrm{Lie}}$ est l'algèbre de Lie libre sur un générateur, i.e. isomorphe à $k \,.\, x$ (l'application quotient envoie x^j sur 0, pour $j > 1$). L'algèbre

enveloppante (au sens Lie) de $\mathscr{L}(V)_{\mathrm{Lie}} = k \,.\, x$ est l'algèbre de polynômes $k[x]$.

L'algèbre enveloppante (au sens Leibniz) de $\mathscr{L}(V)$ est isomorphe à l'algèbre quotient de polynômes non commutatifs $k\langle x, y\rangle/\{xy = 0\}$. (Poser $r_x + l_x = x$, $l_x = -y$). Les applications d_0, d_1 et s_0 sont données par

$$\begin{cases} d_0(x) = x \\ d_0(y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1(x) = 0 \\ d_1(y) = x \end{cases}$$

et $s_0(x) = x + y$.

5.5. *Poincaré-Birkhoff-Witt.* On peut faire un traitement de UL en tous points analogue à celui de U: filtration, théorème de *PBW,* algèbre enveloppante d'un produit, etc. (*cf.* [L-P] pour *PBW*).

6. Cohomologie et homologie d'une algèbre de Leibniz (*cf.* [L1], [C], [L-P])

Historiquement la notion d'algèbre de Leibniz est apparue de la façon suivante. On sait que le calcul de l'homologie (à coefficients triviaux) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut se faire à partir d'un complexe (de Chevalley-Eilenberg) dont l'espace des n-chaînes est $\Lambda^n\mathfrak{g}$ (produit extérieur n fois). J'ai montré, premièrement, que l'on pouvait relever l'opérateur bord $d\colon \Lambda^n\mathfrak{g} \to \Lambda^{n-1}\mathfrak{g}$ en un opérateur bord $\tilde{d}\colon \mathfrak{g}^{\otimes n} \to \mathfrak{g}^{\otimes n-1}$, et, deuxièmement, que la démonstration de $\tilde{d}^2 = 0$ n'utilise que l'identité de Leibniz du crochet. Moralité: le nouveau complexe est encore bien défini pour n'importe quelle algèbre de Leibniz.

En fait on va voir que l'on peut définir plus généralement des groupes d'homologie d'une algèbre de Leibniz à coefficients dans une coreprésentation et des groupes de cohomologie à valeurs dans une représentation. Ces groupes peuvent s'interpréter en termes de foncteurs dérivés (Tor et Ext respectivement) grâce à l'algèbre enveloppante $UL(\mathfrak{g})$.

6.1. *Cohomologie d'une algèbre de Leibniz.* Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz et M une représentation de $\mathfrak{g}$. Le n-ième module des cochaînes de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M est

$$C^n(\mathfrak{g}, M) := \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\otimes n}, M), n \geqslant 0 .$$

On définit un opérateur $d\colon C^n(\mathfrak{g}, M) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, M)$ par