

## 5. Algèbre enveloppante (cf. [L-P]).

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Il est clair que pour toute algèbre de Leibniz  $\mathfrak{g}$  le noyau  $\mathfrak{g}^{\text{ann}}$  (cf. 2.1) est une représentation de l'algèbre de Leibniz  $\mathfrak{g}_{\text{Lie}}$ . C'est une représentation antisymétrique.

Une représentation  $M$  de  $\mathfrak{g}$  est dite *triviale* si elle est à la fois symétrique et antisymétrique, c'est-à-dire

$$[x, m] = 0 = [m, x] \quad \text{pour tout } m \in M, x \in \mathfrak{g} .$$

4.4. *Coreprésentations.* Dans l'analogie avec les algèbres associatives, les représentations sont l'analogie des modules à droite (voir ci-dessous thm 5.2). La notion duale, c'est-à-dire l'analogie des modules à gauche, est celle de coreprésentation.

Par définition une *coreprésentation*  $N$  de l'algèbre de Leibniz  $\mathfrak{g}$  est la donnée d'un  $k$ -module et de deux actions  $[-, -]: \mathfrak{g} \times N \rightarrow N$  et  $[-, -]: N \times \mathfrak{g} \rightarrow N$  vérifiant les axiomes suivants

$$\begin{aligned} (MLL)' \quad & [[x, y], m] = [x, [y, m]] - [y, [x, m]] \\ (LML)' \quad & [[y, [m, x]] = [[y, m], x] - [m, [x, y]] \\ (LLM)' \quad & [[m, x], y] = [m, [x, y]] - [[y, m], x] , \end{aligned}$$

pour tout  $m \in N$  et tout  $x, y \in \mathfrak{g}$ .

Notons que les deux dernières relations impliquent la relation

$$(ZD)' \quad [y, [m, x]] + [[m, x], y] = 0 .$$

Il est clair que toute représentation d'une algèbre de Lie définit à la fois une représentation et une coreprésentation au sens des algèbres de Leibniz.

Le *produit tensoriel* d'une coreprésentation  $N$  et d'une représentation  $M$  est le quotient de  $N \otimes_k M$  par les relations

$$[n, x] \otimes m \sim n \otimes [x, m] \quad \text{et} \quad [x, n] \otimes m \sim n \otimes [m, x]$$

pour tout  $x \in \mathfrak{g}, n \in N$  et  $m \in M$ .

## 5. ALGÈBRE ENVELOPPANTE (cf. [L-P]).

La catégorie des représentations d'une algèbre de Leibniz donnée  $\mathfrak{g}$  est une catégorie abélienne. Il est naturel d'essayer de la représenter comme une catégorie de modules sur une certaine algèbre, appelée algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ .

On construit cette algèbre enveloppante de la façon suivante. Considérons deux copies de  $\mathfrak{g}$  notées  $\mathfrak{g}^l$  et  $\mathfrak{g}^r$  pour les différencier. Les éléments de  $\mathfrak{g}^l$  sont notés  $l_x$ , ceux de  $\mathfrak{g}^r$  sont notés  $r_x$ , pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ . Rappelons que pour tout  $k$ -module  $V$ ,  $T(V)$  désigne l'algèbre tensorielle  $k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots$ , qui est associative et unitaire. Dans  $T(\mathfrak{g}^l \oplus \mathfrak{g}^r)$  on considère l'idéal bilatère  $I$  engendré par les éléments

$$\begin{cases} \text{(i)} & r_{[x,y]} - (r_x r_y - r_y r_x) \\ \text{(ii)} & l_{[x,y]} - (l_x r_y - r_y l_x) \\ \text{(iii)} & (r_y + l_y) l_x \end{cases}$$

pour tout  $x, y \in \mathfrak{g}$ .

5.1. Par définition l'algèbre enveloppante  $UL(\mathfrak{g})$  de l'algèbre de Leibniz  $\mathfrak{g}$  est le quotient

$$UL(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g}^l \oplus \mathfrak{g}^r) / I.$$

5.2. THÉORÈME (cf. [L-P]). *La catégorie des représentations (resp. coreprésentations) de l'algèbre de Leibniz  $\mathfrak{g}$  est équivalente à la catégorie des modules à droite (resp. à gauche) sur  $UL(\mathfrak{g})$ .*

Il existe plusieurs homomorphismes permettant de comparer  $UL(\mathfrak{g})$  à l'algèbre enveloppante, au sens des algèbres de Lie, de  $\mathfrak{g}_{\text{Lie}}$ . Tout d'abord les homomorphismes d'algèbres  $d_0, d_1: UL(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}_{\text{Lie}})$  induits par

$$\begin{cases} d_0(l_x) = 0 \\ d_0(r_x) = \bar{x} \end{cases} \quad \begin{cases} d_1(l_x) = -\bar{x} \\ d_1(r_x) = \bar{x} \end{cases}$$

sont bien définis, puis, dans l'autre sens, l'homomorphisme  $s_0: U(\mathfrak{g}_{\text{Lie}}) \rightarrow UL(\mathfrak{g})$ , induit par  $s_0(\bar{x}) = r_x$ .

5.3. PROPOSITION (cf. [L-P]). *Les homomorphismes  $d_0, d_1, s_0$  ci-dessus vérifient*

$$d_0 s_0 = d_1 s_0 = \text{id} \quad \text{et} \quad (\text{Ker } d_1) (\text{Ker } d_0) = 0.$$

5.4. Exemple. Soit  $V = k \cdot x$  un module libre de rang 1 sur  $k$  engendré par  $x$ . L'algèbre de Leibniz libre  $\mathcal{L}(V)$  est isomorphe à  $k \cdot x \oplus k \cdot x^2 \oplus \dots \oplus k \cdot x^n \oplus \dots$  équipé du crochet

$$\begin{cases} [x, x^i] = x^{i+1} \\ [x^j, x^i] = 0 \quad \text{si } j > 1. \end{cases}$$

Notons que  $\mathcal{L}(V)_{\text{Lie}}$  est l'algèbre de Lie libre sur un générateur, i.e. isomorphe à  $k \cdot x$  (l'application quotient envoie  $x^j$  sur 0, pour  $j > 1$ ). L'algèbre

enveloppante (au sens Lie) de  $\mathcal{L}(V)_{\text{Lie}} = k \langle x \rangle$  est l'algèbre de polynômes  $k[x]$ .

L'algèbre enveloppante (au sens Leibniz) de  $\mathcal{L}(V)$  est isomorphe à l'algèbre quotient de polynômes non commutatifs  $k \langle x, y \rangle / \{xy = 0\}$ . (Poser  $r_x + l_x = x, l_x = -y$ ). Les applications  $d_0, d_1$  et  $s_0$  sont données par

$$\begin{cases} d_0(x) = x \\ d_0(y) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} d_1(x) = 0 \\ d_1(y) = x \end{cases}$$

et  $s_0(x) = x + y$ .

5.5. *Poincaré-Birkhoff-Witt.* On peut faire un traitement de  $UL$  en tous points analogue à celui de  $U$ : filtration, théorème de  $PBW$ , algèbre enveloppante d'un produit, etc. (cf. [L-P] pour  $PBW$ ).

## 6. COHOMOLOGIE ET HOMOLOGIE D'UNE ALGÈBRE DE LEIBNIZ (cf. [L1], [C], [L-P])

Historiquement la notion d'algèbre de Leibniz est apparue de la façon suivante. On sait que le calcul de l'homologie (à coefficients triviaux) d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  peut se faire à partir d'un complexe (de Chevalley-Eilenberg) dont l'espace des  $n$ -chaînes est  $\Lambda^n \mathfrak{g}$  (produit extérieur  $n$  fois). J'ai montré, premièrement, que l'on pouvait relever l'opérateur bord  $d: \Lambda^n \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^{n-1} \mathfrak{g}$  en un opérateur bord  $\tilde{d}: \mathfrak{g}^{\otimes n} \rightarrow \mathfrak{g}^{\otimes n-1}$ , et, deuxièmement, que la démonstration de  $\tilde{d}^2 = 0$  n'utilise que l'identité de Leibniz du crochet. Moralité: le nouveau complexe est encore bien défini pour n'importe quelle algèbre de Leibniz.

En fait on va voir que l'on peut définir plus généralement des groupes d'homologie d'une algèbre de Leibniz à coefficients dans une coreprésentation et des groupes de cohomologie à valeurs dans une représentation. Ces groupes peuvent s'interpréter en termes de foncteurs dérivés (Tor et Ext respectivement) grâce à l'algèbre enveloppante  $UL(\mathfrak{g})$ .

6.1. *Cohomologie d'une algèbre de Leibniz.* Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Leibniz et  $M$  une représentation de  $\mathfrak{g}$ . Le  $n$ -ième module des cochaînes de  $\mathfrak{g}$  à valeurs dans  $M$  est

$$C^n(\mathfrak{g}, M) := \text{Hom}_k(\mathfrak{g}^{\otimes n}, M), n \geq 0.$$

On définit un opérateur  $d: C^n(\mathfrak{g}, M) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, M)$  par