# 7. Calculs de groupes d'homologie HL

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

6.8. THÉORÈME [L2]. *Soit* $k$ *un corps,* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{g}'$ *deux algèbres de Leibniz sur* $k$. *On a alors un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués*

$$HL_*(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}') \cong HL_*(\mathfrak{g}) * HL_*(\mathfrak{g}') .$$

La démonstration de ce théorème utilise une variante algébrique de l'intégrale itérée de Chen.

6.9. *Structure de comonoïde.* L'homologie classique d'une algèbre de Lie admet une structure de cogèbre induite par la diagonale. Dans le cas des algèbres de Leibniz $HL_*(\mathfrak{g})$ admet une structure de *comonoïde,* i.e. la diagonale induit un homomorphisme

$$\Delta_*: HL_*(\mathfrak{g}) \to HL_*(\mathfrak{g}) * HL_*(\mathfrak{g})$$

qui est coassociatif. L'existence de $\Delta_*$ résulte du théorème précédent.

6.10. *Théorie de la déformation.* A toute catégorie «algébrique», par exemple les algèbres associatives, les algèbres associatives et commutatives, les algèbres de Lie, est associée une théorie de la déformation, qui est contrôlée par une certaine théorie cohomologique. Dans les exemples ci-dessus on trouve, en caractéristique zéro, la cohomologie de Hochschild, la cohomologie de Harrison, (= André-Quillen) et la théorie de cohomologie classique des algèbres de Lie (Chevalley-Eilenberg-Koszul) respectivement. On peut montrer que pour les algèbres de Leibniz cette théorie cohomologique est précisément $HL^*$ (*cf.* [R]).

## 7. CALCULS DE GROUPES D'HOMOLOGIE $HL$

On a déjà remarqué (*cf.* 6.5) que l'homologie à coefficients dans la représentation adjointe est, à un décalage près, l'homologie à coefficients triviaux.

Dans la suite on ne s'intéresse qu'aux coefficients triviaux et on note $HL_n(\mathfrak{g})$ au lieu de $HL_n(\mathfrak{g}, k)$.

7.1. *Algèbre de Leibniz abélienne.* Il est clair d'après la définition de l'homologie, que si $\mathfrak{g}$ est abélienne, alors $HL_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^{\otimes n}$, $n \geqslant 0$. L'homomorphisme de comparaison avec l'homologie classique est donc simplement le passage au quotient $\mathfrak{g}^{\otimes n} \to \Lambda^n \mathfrak{g}$. Ainsi les théories $HL$ et $H$ sur les algèbres de Lie sont-elles distinctes dès que $n \geqslant 2$.

En cohomologie on a $HL^n(\mathfrak{g}) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^{\otimes n}, k)$ dans le cas abélien. Ainsi si $\mathfrak{g}$ est de dimension 1 sur $k$ (i.e. $\mathfrak{g} = k$), alors $HL^2(k) = \mathrm{Hom}(k^{\otimes 2}, k) \cong k$.

7.2. *Extensions centrales de* $sl_n(A)$. Soit $A$ une algèbre associative unitaire sur le corps $k$, et $gl_n(A)$ (resp. $sl_n(A)$) son algèbre des matrices (resp. des matrices de trace nulle). On peut montrer que pour tout $n \geqslant 5$ on a un isomorphisme

$$HL_2(sl_n(A)) \cong HH_1(A) ,$$

où $HH_1(A)$ est le premier groupe d'homologie de Hochschild de $A$ à coefficients dans $A$. Cet isomorphisme est relié à l'algèbre de Leibniz $A \otimes A / \mathrm{Im}\, b$ (décrite en 2.4) par l'existence du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & HH_1(A) & \to & A \otimes A/\mathrm{Im}\, b & \xrightarrow{b} & A & \to & HH_0(A) & \to & 0 \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\ 0 & \to & HL_2(sl_n(A)) & \to & stl_n(A) & \to & gl_n(A) & \to & HL_1(gl_n(A)) & \to & 0 \end{array}$$

dans lequel le carré du milieu est un diagramme d'algèbres de Leibniz (*cf.* [L-P] pour plus de détails).

7.3. *Algèbres de Lie réductives.* Soit $k$ un corps de caractéristique zéro. Pour toute algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ sur $k$ on a (*cf.* [N])

$$HL_n(\mathfrak{g}) = 0, \quad n > 0 .$$

En particulier on a $HL_n(sl_r(k)) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc $HL_n(gl_r(k)) \cong k$ pour tout $n \geqslant 0$.

7.4. *Algèbre de Lie des matrices* $gl(A)$. On note par $gl(A)$ la réunion $\cup_n gl_n(A)$ des matrices sur $A$ de taille finie quelconque. On suppose que $k$ est un corps de caractéristique 0. On a alors l'isomorphisme d'espaces vectoriels gradués suivant ([C], [L1]),

$$HL_*(gl(A)) \cong T(HH_{*-1}(A)) ,$$

où $HH_*(A)$ désigne l'homologie de Hochschild de $A$ à coefficients dans $A$ et $T$ est le foncteur module tensoriel. Le point principal de la preuve est dû à C. Cuvier.

Remarquons que ce théorème est tout à fait cohérent avec les résultats précédents (car $HH_n(k) = 0$ pour $n > 0$ par exemple).

En fait on a des résultats plus précis pour $gl_n(A)$ (*cf.* [C], [L1]),

— les homomorphismes naturels

$$HL_n(gl_n(A)) \to HL_n(gl_{n+1}(A)) \to \cdots \to H_n(gl(A))$$

sont des isomorphismes,

— si $A$ est commutatif on a une suite exacte

$$HL_n(gl_{n-1}(A)) \to HL_n(gl_n(A)) \to \Omega^{n-1}_{A/k} \to 0 \tag{7.4.1}$$

où $\Omega^n_{A/k}$ est l'e.v. des $n$-formes différentielles de Kähler de $A$ sur $k$.

Lorsque $A$ est commutatif et lisse nous conjecturons que $HL_*(gl_r(A))$ peut se calculer à partir de la filtration par les $\lambda$-opérations de l'homologie de Hochschild:

$$HL_*(gl_r(A)) \cong T(\bigoplus_{i<r} HH^{(i)}_{*-1}(A)) ,$$

*cf.* [L1, 10.6.22] pour plus de détails. Le calcul de 7.3 montre que cette conjecture est vraie pour $A = k$.

7.5. *Algèbre de Virasoro.* L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Der}(\mathbf{C}[z, z^{-1}])$ des dérivations des polynômes de Laurent est parfaite ($\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$). Elle admet donc une extension centrale universelle que l'on appelle l'algèbre de Virasoro. Il se trouve que cette extension est aussi universelle dans la catégorie des algèbres de Leibniz (*cf.* [L-P]). En termes cohomologiques ce résultat signifie qu'il y a des isomorphismes

$$H^2(\mathfrak{g}) \cong HL^2(\mathfrak{g}) \cong k \quad \text{et} \quad HL_2(\mathfrak{g}) \cong H_2(\mathfrak{g}) \cong k .$$

7.6. *Algèbre de Lie étendue (d'après V. Gnedbaye* [Gn]*).* Pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et toute algèbre unitaire associative et commutative $A$, le produit tensoriel $\mathfrak{g} \otimes A$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie. On peut construire un morphisme naturel

$$HL_*(\mathfrak{g} \otimes A) \to H_*(C(A) \otimes U(\mathfrak{g})_{ab}, b \otimes 1) ,$$

où $(C(A), b)$ est le complexe de Hochschild de $A$. Lorsque $\mathfrak{g}$ est réductive et parfaite on peut en déduire un isomorphisme

$$HL_2(\mathfrak{g} \otimes A) \cong HH_1(A) \otimes S^2(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}$$

et un épimorphisme

$$HL_3(\mathfrak{g} \otimes A) \to (HH_2^-(A) \otimes S^2(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}) \oplus (HH_2^+(A) \otimes S^3(\mathfrak{g})_{\mathfrak{g}}) .$$