2.5. OÙ L'ON CARACTÉRISE Com_C^f

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

2) Il n'est pas indispensable de passer aux modules pour prouver le lemme 1. On remarque d'abord (cf. n° 1.4, Exemple 2) que F est isomorphe à un sous-comodule de $C_E \otimes F$, i.e. de $(C_E)^n$, avec $n = \text{rang}(F)$. D'autre part, C_E est isomorphe, comme comodule, à un quotient de $E \otimes E'$, c'est-à-dire de E^m, où $m = \text{rang}(E)$. D'où le résultat.

Exemples

1) La sous-catégorie de Com_C^f formée des *objets semi-simples* correspond à la *plus grande sous-cogèbre semi-simple* de C (la somme de toutes les sous-cogèbres simples).

2) Supposons C semi-simple, et soit $(E_i)_{i \in I}$ un ensemble de représentants des classes de C-comodules simples. Posons $C_i = C_{E_i}$, de sorte que C est somme directe des cogèbres simples C_i. Si J est une partie de I, $C_J = \sum_{i \in J} C_i$ est une sous-cogèbre de C, et toute sous-cogèbre de C s'obtient de cette manière, et de façon unique. La sous-catégorie correspondant à C_J est formée des comodules isomorphes à des sommes directes finies des E_i, $i \in J$.

2.5. OÙ L'ON CARACTÉRISE Com_C^f

Soit M une catégorie abélienne munie des deux structures suivantes:

a) M est une catégorie *sur* K; cela signifie que, si E, F sont des objets de M, $\mathrm{Hom}^M(E, F)$ est muni d'une structure de K-espace vectoriel, la composition des morphismes étant bilinéaire.

b) On se donne un foncteur $v: M \to \mathrm{Vect}_K^f$ de M dans la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

On fait les *hypothèses* suivantes:

(i) Le foncteur v est *K-linéaire,* i.e. pour tout $E, F \in M$, l'application $v: \mathrm{Hom}^M(E, F) \to \mathrm{Hom}(v(E), v(F))$ est K-linéaire.

(ii) Le foncteur v est *exact* et *fidèle.*

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une cogèbre* C *sur* K (et une seule, à isomorphisme près) *telle que* M *soit équivalente à* Com_C^f, *cette équivalence transformant le foncteur* v *en le foncteur* C*-module* $\mapsto$ *espace vectoriel sous-jacent.*

[Ici, il est nécessaire d'interpréter M comme une petite catégorie, ou en tout cas de supposer qu'il existe un ensemble de représentants pour les classes d'isomorphisme d'objets de M.]

Avant de commencer la démonstration, remarquons que les hypothèses (i) et (ii) entraînent que $\mathrm{Hom}^M(E, F)$ est un espace vectoriel *de dimension finie* pour tout $E, F \in M$. De plus, un sous-objet d'un objet E de M est connu lorsqu'on connaît le sous-espace vectoriel correspondant de $\upsilon(E)$; l'ensemble des sous-objets de E s'identifie ainsi à un sous-ensemble réticulé de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\upsilon(E)$; en particulier, E est *de longueur finie*. On a des résultats analogues pour les objets quotients.

D'autre part, si $E \in M$, nous noterons M_E la sous-catégorie pleine de M formée des quotients F/G, où F est isomorphe à un sous-objet d'un E^n (n entier > 0 quelconque).

Enfin, si E est un objet de M, et si X est une partie de $V(E)$, nous dirons que X *engendre* E si tout sous-objet F de E tel que $\upsilon(F) \supset X$ est égal à E.

Démonstration du théorème 3

a) *Le cas fini; une majoration.*

C'est celui où il existe un objet E de M tel que $M_E = M$. Soit $n = \mathrm{rang}_K \, \upsilon(E)$.

LEMME 2. *Soit F un objet de M pouvant être engendré par un élément* (cf. ci-dessus). *On a*

$$\mathrm{rang}_K \, \upsilon(F) \leqslant n^2 .$$

Par hypothèse, on peut écrire F comme quotient F_1/F_2, où F_1 est isomorphe à un sous-objet d'un E^m, pour m convenable. Soit $x \in \upsilon(F)$ engendrant F et soit x_1 un élément de $\upsilon(F_1)$ dont l'image dans $\upsilon(F)$ est x. Soit G le plus petit sous-objet de E^m tel que $\upsilon(G)$ contienne x_1. On a $G \subset F_1$ et l'image de G dans $F = F_1/F_2$ est égale à F. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{rang}_K \, \upsilon(G) \leqslant n^2$. Si $m \leqslant n$, c'est évident. Supposons donc que $m > n$. On a $x_1 \in \upsilon(G) \subset \upsilon(E^m) = \upsilon(E)^m$. Soient $y_1, \ldots, y_m$ les composantes de x_1, considéré comme élément de $\upsilon(E)^m$. Puisque $m > n$, il existe des $a_i \in K$, non tous nuls, tels que $\sum a_i y_i = 0$. Or les a_i définissent un morphisme surjectif $E^m \to E$; si N est le noyau de ce morphisme, on a $N \simeq E^{m-1}$, comme on le voit facilement. D'autre part, on a $x_1 \in \upsilon(N)$, d'où $G \subset N$ puisque x_1 engendre G. On a donc obtenu un plongement de G dans E^{m-1}; d'où le lemme, en raisonnant par récurrence sur m.

b) *Le cas fini; construction d'un générateur projectif.*

Les hypothèses étant les mêmes que ci-dessus, on choisit un objet P de M pouvant être engendré par *un* élément $x \in \upsilon(P)$, et tel que $\upsilon(P)$ soit *de rang maximum* parmi ceux jouissant de cette propriété. C'est possible en vertu du Lemme 2.

LEMME 3. (i) *Le couple* (P, x) *représente le foncteur* v.

(ii) P *est un générateur projectif de* M.

Il suffit de prouver (i); l'assertion (ii) en résultera, puisque le foncteur v est exact et fidèle.

Soient donc $F \in M$, et $y \in v(F)$. Il nous faut prouver l'existence et l'unicité d'un morphisme $f: P \to F$ transformant x en y. L'unicité provient de ce que x engendre P. Pour démontrer l'existence, soit Q le plus petit sous-objet de $P \times F$ tel que $v(Q)$ contienne (x, y). Le morphisme $Q \to F$ induit par pr_1 est surjectif, du fait que P est engendré par x. On a donc

$$\mathrm{rang}_K\, v(Q) \geqslant \mathrm{rang}_K\, v(P)\ ;$$

mais le caractère maximal de $v(P)$ entraîne qu'il y a égalité; le morphisme $Q \to P$ est donc un isomorphisme. En composant son inverse avec la seconde projection $Q \to F$, on obtient un morphisme f ayant la propriété voulue.

c) *Le cas fini; fin de démonstration.*

Soit A l'algèbre des endomorphismes de P. C'est une K-algèbre de dimension finie. Le lemme suivant est bien connu:

LEMME 4. *Il existe un foncteur* $\varphi: \mathrm{Mod}^f_{A^o} \to M$ *et un seul* (à isomorphisme près) *qui soit exact à gauche et transforme* A (considéré comme A-module à droite) *en* P. *Ce foncteur est une équivalence de catégories.*

Indiquons brièvement la démonstration. Pour chaque A-module à droite H de rang fini, on choisit une *présentation finie* de H:

$$A^p \xrightarrow{\alpha} A^q \to H \to 0$$

où α est une $p \times q$-matrice à coefficients dans A. Cette matrice définit un morphisme $P^p \to P^q$ et l'on prend pour $\varphi(H)$ le *conoyau* de ce morphisme. On prolonge de façon évidente φ en un foncteur $\mathrm{Mod}^f_{A^o} \to M$ et l'on vérifie qu'il a la propriété voulue. On note généralement ce foncteur $H \mapsto H \otimes_A P$. C'est un adjoint du foncteur $F \mapsto \mathrm{Hom}^M(P, F)$. Son unicité est immédiate. Le fait que ce soit une équivalence résulte de ce que P est un générateur projectif de M.

De plus, l'équivalence $\varphi: H \mapsto H \otimes_A P$ transforme le foncteur «espace vectoriel sous-jacent à un A-module» en un foncteur isomorphe à v (en effet le premier foncteur est représentable par A, le second par P, et φ transforme A en P). On peut donc prendre pour cogèbre la cogèbre duale de l'algèbre A, et toutes les conditions sont vérifiées.

d) *Cas général.*

Soit X l'ensemble des sous-catégories N de M telles qu'il existe $E \in M$ avec $N = M_E$. L'ensemble X est ordonné filtrant puisque $M_{E_1 \times E_2}$ contient M_{E_1} et M_{E_2}. Si $N \in X$, soit comme ci-dessus (P_N, x_N) un couple représentant la restriction à N du foncteur v, et soit $A_N = \operatorname{End}(P_N)$. Si $N_1 \supset N_2$, il existe un unique morphisme $P_{N_1} \to P_{N_2}$ transformant x_{N_1} en x_{N_2}; on voit aisément que ce morphisme identifie P_{N_2} au plus grand quotient de P_{N_1} appartenant à N_2. En particulier, tout endomorphisme de P_{N_1} définit par passage au quotient un endomorphisme de P_{N_2}. D'où un homomorphisme $A_{N_1} \to A_{N_2}$ qui est surjectif. Si A désigne l'algèbre profinie limite projective des A_N, pour $N \in X$, il est alors clair que la cogèbre duale de A répond à la question.

Quant à l'*unicité* de cette cogèbre (ou de l'algèbre A), elle provient de la remarque suivante: *A est isomorphe à l'algèbre des endomorphismes du foncteur v*, munie de la topologie de la convergence simple.

Remarque. Il est probablement possible d'éviter le passage par le cas $M = M_E$, en utilisant le théorème de Grothendieck disant qu'un foncteur exact à droite est proreprésentable: on appliquerait ce théorème à v, d'où $P \in \operatorname{Pro} M$ représentant v et on obtiendrait A comme l'algèbre des endomorphismes de P.

§ 3. BIGÈBRES

3.1. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS

(Dans ce n°, ainsi que dans le suivant, on ne suppose pas que K soit un corps.)

Rappelons (cf. *Alg.* III) qu'une *bigèbre* sur K est un K-module C muni d'une structure de cogèbre $d: C \to C \otimes C$ et d'une structure d'algèbre $m: C \otimes C \to C$, ces structures vérifiant l'axiome suivant:

(i) Si l'on munit $C \otimes C$ de la structure d'algèbre produit tensoriel de celle de C par elle-même, d est un homomorphisme d'algèbres de C dans $C \otimes C$.

Cet axiome équivaut d'ailleurs à:

(i′) L'application $m: C \otimes C \to C$ est un morphisme de cogèbres (pour la structure naturelle de cogèbre de $C \otimes C$).

Dans tout ce qui suit, nous réserverons le terme de *bigèbres* à celles vérifiant les conditions suivantes:

(ii) La cogèbre (C, d) possède une co-unité $e: C \to K$.

(iii) L'algèbre (C, m) est commutative, associative, et possède un élément unité 1.