

3.2. Correspondance entre comodules et G-modules

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(iv) La co-unité $e: C \rightarrow K$ est un morphisme d'algèbres et $e(1) = 1$.

(v) On a $d(1) = 1 \otimes 1$.

La condition (iii) permet de considérer C comme l'*algèbre affine* d'un schéma affine G sur K ; on a $G = \text{Spec}(C)$. Pour tout $K_1 \in \text{Alg}_K$, on note $G(K_1)$ l'ensemble des points de G à valeurs dans K_1 , autrement dit l'ensemble des morphismes (au sens de Alg_K) de C dans K_1 . La condition (iv) signifie que e est un élément de $G(K)$. Grâce aux conditions (i) et (v), la structure de cogèbre de C peut être interprétée comme un *morphisme* de $G \times G$ dans G , qui est *associatif* et admet e pour élément neutre. Ainsi G est un *schéma affine en monoïdes* sur K ; pour tout $K_1 \in \text{Alg}_K$, $G(K_1)$ a une structure naturelle de monoïde, d'élément neutre l'image de e dans $G(K_1)$, image que l'on se permet de noter encore e .

On appelle *inversion* sur C , toute application $i: C \rightarrow C$ ayant les propriétés suivantes:

a) i est un morphisme d'algèbres, et $i(1) = 1$.

b) $m \circ (1_C \otimes i) \circ d$ est égal à l'endomorphisme $c \mapsto e(c) \cdot 1$ de C .

La condition a) permet d'interpréter i comme un morphisme $I: G \rightarrow G$ et la condition b) signifie que $x \cdot I(x) = e$ pour tout $x \in G(K_1)$, et tout K_1 . On voit ainsi que, si i existe, il est unique, et que c'est un isomorphisme de C sur la bigèbre opposée C° . L'existence de i revient à dire que G est un *schéma en groupes*.

Remarque. L'application identique $C \rightarrow C$ est un point de $G(C)$, appelé *point canonique*; nous le noterons γ . De même, on peut interpréter une inversion i de C comme un point ι de $G(C)$ et la condition b) signifie que $\gamma \iota = e$.

3.2. CORRESPONDANCE ENTRE COMODULES ET G -MODULES

Soit E un module. Si $K_1 \in \text{Alg}_K$, nous noterons $\text{End}_E(K_1)$ le monoïde des endomorphismes du K_1 -module $K_1 \otimes E$, et $\text{Aut}_E(K_1)$ le groupe des éléments inversibles de $\text{End}_E(K_1)$. Si $K_1 \rightarrow K_2$ est un morphisme, on définit de manière évidente le morphisme correspondant de $\text{End}_E(K_1)$ dans $\text{End}_E(K_2)$. Ainsi End_E est un foncteur de Alg_K dans la catégorie Mon des monoïdes; de même Aut_E est un foncteur de Alg_K dans la catégorie Gr des groupes.

Soient maintenant C et $G = \text{Spec}(C)$ comme ci-dessus. On a vu que G définit un foncteur (noté également G) de Alg_K dans Mon ; ce foncteur est à valeurs dans Gr si G est un schéma en groupes.

DÉFINITION 1. On appelle *représentation linéaire de G dans E* tout morphisme ρ du foncteur G dans le foncteur End_E .

En d'autres termes, ρ consiste en la donnée, pour tout $K_1 \in \text{Alg}_K$, d'un morphisme de monoïdes $\rho(K_1): G(K_1) \rightarrow \text{End}_E(K_1)$ et, si $K_1 \rightarrow K_2$ est un morphisme dans Alg_K , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(K_1) & \rightarrow & G(K_2) \\ \rho(K_1) \downarrow & & \downarrow \rho(K_2) \\ \text{End}_E(K_1) & \rightarrow & \text{End}_E(K_2) \end{array}$$

doit être commutatif.

Terminologie. Une représentation linéaire du monoïde G^o opposé à G est appelée une *antireprésentation* de G . Un module E , muni d'une représentation (resp. antireprésentation) $G \rightarrow \text{End}_E$ est appelé un G -module à gauche (resp. à droite).

Remarque. Si G est un schéma en groupes, et si $\rho: G \rightarrow \text{End}_E$ est une représentation linéaire de G dans E , il est clair que ρ prend ses valeurs dans le sous-foncteur Aut_E de End_E .

Notons maintenant G^{ens} le foncteur G , considéré comme foncteur à valeurs dans Ens (i.e. le composé $\text{Alg}_K \xrightarrow{G} \text{Mon} \rightarrow \text{Ens}$); définissons de même $\text{End}_E^{\text{ens}}$. Soit ρ un morphisme de G^{ens} dans $\text{End}_E^{\text{ens}}$. L'image par $\rho(C)$ du point canonique $\gamma \in G(C)$ est un C -endomorphisme de $C \otimes E$, donc est définie par une application K -linéaire $d(\rho): E \rightarrow C \otimes E$.

PROPOSITION 1. (a) *L'application $\rho \mapsto d(\rho)$ est une bijection de l'ensemble des morphismes de G^{ens} dans $\text{End}_E^{\text{ens}}$ sur l'ensemble $\text{Hom}(E, C \otimes E)$.*

(b) *Pour que $\rho: G^{\text{ens}} \rightarrow \text{End}_E^{\text{ens}}$ soit une représentation linéaire (resp. une antireprésentation linéaire) de G dans E , il faut et il suffit que $d(\rho)$ munisse E d'une structure de C -comodule à droite (resp. à gauche).*

C'est là un résultat bien connu (cf. *SGAD*, exposé I). Rappelons la démonstration:

L'assertion (a) provient de ce que G^{ens} est représentable par le couple (C, γ) . En particulier, si $x \in G(K_1)$, l'image de x par $\rho(K_1)$ est l'application K_1 -linéaire de $K_1 \otimes E$ dans $K_1 \otimes E$ qui prolonge l'application linéaire $(x \otimes 1_E) \circ d(\rho)$ de E dans $K_1 \otimes E$.

Pour (b), on peut se borner au cas des antireprésentations. Il faut d'abord exprimer que $\rho(K_1)$ transforme e en 1 pour tout K_1 , et il suffit de le faire pour $K_1 = K$. Cela donne la condition

$$(e \otimes 1_E) \circ d(\rho) = 1_E$$

qui est l'axiome (2) des comodules.

Il faut ensuite exprimer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 G^{\text{ens}} \times G^{\text{ens}} & \xrightarrow{\rho \times \rho} & \text{End}_E^{\text{ens}} \times \text{End}_E^{\text{ens}} \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 G^{\text{ens}} & \xrightarrow{\rho} & \text{End}_E^{\text{ens}}
 \end{array}$$

(où α désigne la loi de composition de G et β l'*opposée* de la loi de composition de End_E) est commutatif. Notons γ_1 (resp. γ_2) l'homomorphisme de C dans $C \otimes C$ qui applique $x \in C$ dans $x \otimes 1$ (resp. $1 \otimes x$); on a $\gamma_1, \gamma_2 \in G(C \otimes C)$. De plus, il est immédiat que le foncteur $G^{\text{ens}} \times G^{\text{ens}}$ est représentable par $(C \otimes C, \gamma_1 \times \gamma_2)$. Il suffit donc d'exprimer que les deux images de $\gamma_1 \times \gamma_2$ dans $\text{End}_E(C \otimes C)$ coïncident. Or l'image de $\gamma_1 \times \gamma_2$ dans $G(C \otimes C)$ est le point donné par $d: C \rightarrow C \otimes C$; son image dans $\text{End}_E(C \otimes C)$, identifié à $\text{Hom}(E, C \otimes C \otimes E)$ est donc $(d \otimes 1_E) \circ d(\rho)$. Il faut ensuite calculer l'image de $\gamma_1 \times \gamma_2$ par $G \times G \xrightarrow{\rho \times \rho} \text{End}_E \times \text{End}_E \xrightarrow{\beta} \text{End}_E$. On trouve, après un calcul sans difficultés [cf. ci-après] l'élément $(1_C \otimes d(\rho)) \circ d(\rho)$. La commutativité du diagramme considéré équivaut donc à l'axiome (1) des comodules, ce qui achève de démontrer la proposition.

[Voici le «calcul sans difficultés» en question. Il s'agit de déterminer l'image $\varphi \in \text{End}_E(C \otimes C)$ de $\gamma_1 \times \gamma_2$ par $\beta \circ (\rho \times \rho)$. Si φ_1 (resp. φ_2) est l'image de γ_1 (resp. γ_2) par ρ , on a $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ (puisque β est l'*opposée* de la loi de composition). De plus, φ_i est caractérisé par le fait de prolonger l'application K -linéaire $(\gamma_i \otimes 1_E) \circ d(\rho): E \rightarrow C \otimes E \rightarrow C \otimes C \otimes E$. Soit alors $x \in E$, et posons:

$$d(\rho)(x) = \sum c_i \otimes x_i, \quad d(\rho)(x_i) = \sum c_{ij} \otimes x_{ij}.$$

On a:

$$\varphi_1(x) = (\gamma_1 \otimes 1_E)(\sum c_i \otimes x_i) = \sum c_i \otimes 1 \otimes x_i.$$

De même:

$$\varphi_2(x_i) = \sum 1 \otimes c_{ij} \otimes x_{ij}.$$

D'où:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \varphi_2(\varphi_1(x)) = \sum \varphi_2(c_i \otimes 1 \otimes x_i) \\
 &= \sum (c_i \otimes 1) \cdot \sum 1 \otimes c_{ij} \otimes x_{ij} \quad (\varphi_2 \text{ étant } C \otimes C\text{-linéaire}) \\
 &= \sum c_i \otimes c_{ij} \otimes x_{ij}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} ((1_C \otimes d(\rho)) \circ d(\rho))(x) &= (1_C \otimes d(\rho)) (\sum c_i \otimes x_i) \\ &= \sum c_i \otimes c_{ij} \otimes x_{ij} . \end{aligned}$$

En comparant, on voit bien que l'on a

$$\varphi = (1_C \otimes d(\rho)) \circ d(\rho) .]$$

Remarque. La proposition précédente permet donc d'identifier les G -modules à gauche aux C -comodules à droite, et inversement. [Il est bien triste d'avoir ainsi à échanger sa droite et sa gauche, mais on n'y peut rien. Toutefois, lorsque G est un schéma en groupes, on peut, au moyen de l'inverse, transformer canoniquement tout module à droite en un module à gauche.]

Exemple. La représentation triviale $\rho = 1$ de G dans un module E correspond à la structure de comodule $x \mapsto 1 \otimes x$ sur E . Pour $E = K$ on obtient le comodule *unité*.

OPÉRATIONS SUR LES COMODULES

a) *Produit tensoriel.*

Si E_1 et E_2 sont des C -modules (à gauche, par exemple), on a défini au n° 1.2 une structure de $C \otimes C$ -comodule sur $E_1 \otimes E_2$. Comme $m : C \otimes C \rightarrow C$ est un morphisme de cogèbres, on déduit de là *une structure de C -comodule sur $E_1 \otimes E_2$* . Du fait que m est commutative, cette structure ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit E_1 et E_2 . Elle correspond (via la prop. 1) à l'opération évidente de *produit tensoriel de G -modules* (la vérification de ce fait est immédiate).

b) *Contragrédiente.*

Supposons que C admette une inversion, et soit E un C -comodule à gauche qui est projectif de type fini comme module. En utilisant les isomorphismes

$$\text{Hom}(E, C \otimes E) \simeq \text{Hom}(E \otimes E', C) \simeq \text{Hom}(E', C \otimes E')$$

on définit sur E' une structure de C -module à droite. En utilisant l'inversion i , on transforme cette structure en une structure de C -comodule à gauche, dite *contragrédiente* de celle donnée sur E et notée \check{E} . Elle correspond (via la prop. 1) à l'opération évidente de «*contragrédiente d'une représentation*». [L'hypothèse faite sur E sert à assurer que le foncteur «dual» commute au foncteur «extension des scalaires».]