§4. Enveloppes

DÉFINITION 3. *Soit C une bigèbre possédant une inversion. Un C-comodule E de rang fini est dit fidèle si $C(E \oplus \check{E}) = C$.*

Vu ce qui précède, E est fidèle si et seulement si $G \to G_E$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 8. *Si E est fidèle, toute représentation linéaire de G est quotient d'une sous-représentation d'une somme directe de représentations $\overset{n}{\otimes}(E \oplus \check{E})$.*

Cela résulte du lemme 1 du n° 2.4.

COROLLAIRE. *Tout G-module simple est quotient de Jordan-Hölder d'un $\overset{n}{\otimes}(E \oplus \check{E})$.*

Remarques

1) Dans le corollaire ci-dessus, on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par les représentations $\overset{n}{\otimes} E \overset{m}{\otimes} \det(E)^{-1}$, avec des notations évidentes.

2) Il se peut que G_E soit fermé dans End_E (et non pas seulement dans $\mathbf{GL}_E$), autrement dit que $C(E) = C(E \oplus \check{E})$. C'est le cas, par exemple, si G_E est contenu dans $\mathbf{SL}_E$. Dans ce cas, la prop. 8 et son corollaire se simplifient: on peut remplacer les puissances tensorielles de $E \oplus \check{E}$ par celles de E.

§4. ENVELOPPES

4.1. COMPLÉTION D'UNE ALGÈBRE

[Ce sorite pourrait remonter au n° 2.2.]

Soit A une algèbre associative à élément unité. Soit S_d (resp. S_g, S) l'ensemble des idéaux à droite (resp. à gauche, resp. bilatères) de codimension finie dans A. On a $S_d \cap S_g = S$ et S est *cofinal* à la fois dans S_d et dans S_g; en effet, si $\mathfrak{a} \in S_g$ par exemple, l'annulateur du A-module $A/\mathfrak{a}$ appartient à S et est contenu dans $\mathfrak{a}$.

On posera:

$$\hat{A} = \varprojlim . A/\mathfrak{a}$$

la limite projective étant prise sur l'ensemble ordonné filtrant S. L'algèbre $\hat{A}$ est *l'algèbre profinie complétée* de A, pour la topologie définie par S (ou S_d, ou S_g, cela revient au même). Il y a un isomorphisme évident de la catégorie des A-modules de rang fini sur celle des $\hat{A}$-modules topologiques discrets de rang fini.

Soit F le dual de A; on le munit de sa structure naturelle de A-bimodule. Si $\mathfrak{a} \in S$, soit $F_{\mathfrak{a}}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans F. Soit C la réunion des $F_{\mathfrak{a}}$, pour $\mathfrak{a} \in S$. Le dual de C (resp. le dual topologique de $\hat{A}$) s'identifie de façon évidente à $\hat{A}$ (resp. à C). D'après le n° 2.2, il y a donc sur C une structure de *cogèbre,* caractérisée par la formule:

(1) $$< d(c), a \otimes b > \; = \; < c, ab > \quad \text{si} \quad c \in C, a, b \in A \, .$$

De plus, tout A-module à droite de rang fini est muni canoniquement d'une structure de comodule à gauche sur C, et réciproquement; on a

(2) $$< d_E(x), a \otimes x' > \; = \; < xa, x' > \quad \text{si} \quad x \in E, x' \in E', a \in A$$

d'après la formule (1) du n° 2.2.

Les éléments de la cogèbre C peuvent être caractérisés de la manière suivante:

LEMME 1. *Soit f un élément du dual F de A. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $f \in C$.

(b) (resp. (b′)) *Le sous-A-module à gauche* (resp. à droite) *de F engendré par f est de rang fini.*

(c) *Il existe un A-module à droite E de rang fini, et des éléments $x_i \in E, x_i' \in E'$ en nombre fini, tels que*

$$< f, a > \; = \; \sum < x_i a, x_i' > \quad \textit{pour tout} \quad a \in A \, .$$

La condition (b) signifie que l'annulateur de f dans le A-module à gauche F appartient à S_g; comme S est cofinal dans S_g, cela revient à dire que f appartient à C. On démontre de même que (a) $\Leftrightarrow$ (b′).

D'autre part, pour un module E donné, la condition (c) signifie que f appartient à la sous-cogèbre C_E de C attachée à E (cf. n° 2.1). Comme C est réunion des C_E, cela prouve que (a) $\Leftrightarrow$ (c).

[On laisse au lecteur le plaisir de démontrer directement l'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c).]

4.2. LA BIGÈBRE D'UN GROUPE

On applique ce qui précède à l'algèbre $A = K[\Gamma]$ d'un groupe Γ. Le dual $F = F(\Gamma)$ de A est *l'espace des fonctions* sur Γ; la dualité entre A et F s'exprime par la formule:

$$< f, \sum \lambda_i \gamma_i > \; = \; \sum \lambda_i f(\gamma_i) \quad \text{si} \quad f \in F, \lambda_i \in K, \gamma_i \in \Gamma \, .$$

La cogèbre correspondante est notée $C = C(\Gamma)$. Elle jouit des propriétés suivantes:

(i) La co-unité de C est l'application $e: f \mapsto f(1)$.

(ii) Pour qu'une fonction f appartienne à C, il faut et il suffit que *ses translatées* (à gauche ou à droite) *engendrent un K-espace vectoriel de dimension finie.* (C'est l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b) du Lemme 1.)

(iii) Identifions à la façon habituelle les éléments de $F \otimes F$ aux *fonctions décomposables* sur $\Gamma \times \Gamma$. Si $f \in C$, on a $d(f) \in C \otimes C$ et $C \otimes C$ est un sous-espace de $F \otimes F$; ainsi $d(f)$ peut être interprétée comme une fonction sur $\Gamma \times \Gamma$. *On a*:

$$d(f)(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1\gamma_2) \quad \text{si} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma\,. \tag{3}$$

(Cela ne fait que traduire la formule (1) du n° précédent.)

(iv) C contient 1, et est stable par le *produit*: cela résulte de (ii).

(v) Les structures de cogèbre et d'algèbre de C sont *compatibles* entre elles, i.e. elles font de C une *bigèbre.* Cette bigèbre vérifie les axiomes du n° 3.1. (L'axiome (i) dit que $f \mapsto d(f)$ doit être un morphisme d'*algèbres*; c'est le cas. Les autres axiomes sont encore plus évidents.)

(vi) La bigèbre C possède une *inversion i* donnée par

$$i(f)(\gamma) = f(\gamma^{-1})\,. \tag{4}$$

(Il faut vérifier les conditions (a) et (b) du n° 3.1. La condition (a) est évidemment satisfaite. Pour (b), soit $f \in C$ et écrivons $d(f)$ sous la forme $\sum\limits_\alpha g_\alpha \otimes h_\alpha$. On a

$$(1_C \otimes i)(d(f)) = \sum g_\alpha \otimes i(h_\alpha)$$

et l'on doit voir que $\sum g_\alpha . i(h_\alpha) = e(f) . 1$. Or, si $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned}\sum g_\alpha(\gamma) i(h_\alpha)(\gamma) &= \sum g_\alpha(\gamma) h_\alpha(\gamma^{-1}) = d(f)(\gamma, \gamma^{-1}) \\ &= f(\gamma . \gamma^{-1}) = f(1) = e(f)\,,\end{aligned}$$

d'où la formule voulue.)

(vii) Soit $G = \mathrm{Spec}(C)$ le *schéma en groupes* attaché à C. Tout élément $\gamma \in \Gamma$ définit un morphisme $f \mapsto f(\gamma)$ de C dans K, donc un élément du groupe $G(K)$ des points de G à valeurs dans K. *L'application* $\Gamma \to G(K)$ *ainsi définie est un homomorphisme*; cela résulte de la définition de la loi de composition de $G(K)$.

(viii) D'après le n° 4.1, tout Γ-module à droite E de rang fini est muni canoniquement d'une structure de C-comodule à gauche de rang fini (et inversement). Plus précisément, si $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E, et si l'on a

$$v_i \gamma = \sum_{j \in I} c_{ij}(\gamma) v_j \, , \qquad \text{avec} \qquad c_{ij} \in C \, , \tag{5}$$

le coproduit de E est donné par:

$$d_E(v_i) = \sum_{j \in I} c_{ij} \otimes v_j \, . \tag{6}$$

(ix) La correspondance définie ci-dessus entre Γ-modules à droite de rang fini et C-comodules à gauche de rang fini est *compatible* avec les opérations «produit tensoriel» et «contragrédiente»; cela résulte de ce qui a été dit au n° 3.2, combiné avec (vii) ci-dessus.

Remarque. On peut caractériser $G = \mathrm{Spec}(C)$ par la propriété universelle suivante: tout homomorphisme de Γ dans le groupe $H(K)$ des K-points d'un schéma en groupe affine H se prolonge de manière unique en un morphisme $G \to H$. Le foncteur $\Gamma \mapsto G$ est donc *adjoint* du foncteur $H \mapsto H(K)$.

4.3. L'ENVELOPPE D'UN GROUPE RELATIVEMENT À UNE CATÉGORIE DE REPRÉSENTATIONS

On conserve les notations du numéro précédent.

DÉFINITION 1. *Soit L une sous-catégorie pleine de la catégorie des Γ-modules à gauche de rang fini. On dit que L est saturée si L vérifie les conditions suivantes:*

a) *Si $E \in L$ et si F est isomorphe, soit à un quotient de E, soit à un sous-objet de E, on a $F \in L$.*

b) *L est stable par somme directe finie, produit tensoriel et contragrédiente.*

c) *La représentation unité (de module K) appartient à L.* (Bien entendu, on a une notion analogue pour les Γ-modules à droite.)

THÉORÈME 1. *Si L est saturée, il existe une sous-bigèbre C_L de $C(\Gamma)$ et une seule telle que L soit la catégorie des C_L-comodules à droite de rang fini. La bigèbre C_L contient l'élément* 1, *vérifie les axiomes du* n° 3.1, *et est stable par l'inversion i.*

Cela résulte des props. 2 et 3 du n° 3.3.

DÉFINITION 2. *Le schéma* $G_L = \mathrm{Spec}(C_L)$ *est appelé l'enveloppe de* Γ *relativement à la catégorie saturée* L.

Les propriétés suivantes de G_L résultent de sa définition et de ce qui a été démontré dans les paragraphes précédents:

a) G_L est un quotient du schéma en groupes G défini au n° précédent.

b) On a un homomorphisme canonique $\Gamma \to G_L(K)$. De plus, tout sous-schéma fermé de G_L contenant l'image de Γ est égal à G_L (cela exprime simplement le fait que les éléments de C_L sont des *fonctions* sur Γ). En particulier, l'image de Γ dans $G_L(K)$ est dense pour la topologie de Zariski.

c) Le schéma G_L est absolument réduit.

d) La bigèbre C_L est réunion des cogèbres C_E attachées aux éléments E de L.

e) Si $E \in L$, soit G_E l'image de la représentation $\rho: G_L \to \mathbf{GL}_E$ attachée à E (cf. n° 3.5). Le groupe G_E est l'adhérence (pour la topologie de Zariski) de l'image de Γ dans $\mathbf{GL}_E(K) = \mathrm{Aut}(E)$.

f) Soient $E_1, E_2 \in L$. Pour qu'il existe un morphisme $G_{E_1} \to G_{E_2}$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \swarrow & & \searrow \\ G_{E_1}(K) & \to & G_{E_2}(K) \end{array}$$

soit commutatif, il faut et il suffit que E_2 soit isomorphe à un quotient d'une sous-représentation d'une somme directe de représentations $\otimes^n(E_1 \oplus \check{E}_1)$. L'homomorphisme $G_{E_1} \to G_{E_2}$ est alors unique.

g) On a $G = \varprojlim . G_E$ (vis-à-vis des morphismes définis ci-dessus).

h) Soit $K_1 \in \mathrm{Alg}_K$ et soit v_{K_1} le foncteur de L dans Mod_{K_1} défini par $E \mapsto K_1 \otimes E$. Il y a une bijection canonique (cf. n° 3.4) du groupe $G_L(K_1)$ sur le groupe des automorphismes du foncteur v_{K_1} commutant au produit tensoriel et triviaux sur le module unité K.

Remarque. La détermination explicite de G_L (pour Γ et L donnés) est souvent un problème non trivial. On en verra quelques exemples au §5 (voir aussi les exercices du §4).

Exemples

a) On peut prendre pour L la catégorie de *toutes* les représentations linéaires de Γ; le groupe G_L est alors le groupe G du numéro précédent.

b) Supposons que K soit un *corps topologique* (resp. *un corps valué complet non discret*) et que Γ soit muni d'une structure de *groupe topologique* (resp. de *groupe de Lie* sur K). On peut prendre pour L la catégorie des représentations *continues* (resp. *K-analytiques*) de rang fini. Une fonction $f \in C$ appartient à la bigèbre C_L correspondante si et seulement si elle est continue (resp. analytique): cela se vérifie sans difficulté. Le schéma G_L est appelé simplement *l'enveloppe* du groupe topologique Γ (resp. du groupe de Lie Γ). On peut le caractériser par la propriété universelle suivante: si H est un groupe algébrique linéaire, tout homomorphisme *continu* (resp. *analytique*) de Γ dans le groupe topologique (resp. de Lie) $H(K)$ se prolonge de façon unique en un morphisme de G_L dans H. Cela résulte simplement de la description de C_L donnée ci-dessus.

On notera que, même lorsque Γ est un groupe de Lie connexe de dimension finie, son enveloppe n'est pas en général un groupe algébrique (i.e. G_L ne possède en général pas de module *fidèle*, cf. exercice 1).

c) Soit k un corps complet pour une valuation discrète; on suppose k d'inégale caractéristique et de corps résiduel algébriquement clos. Soit $\bar{k}$ une clôture algébrique de k et soit $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Prenons pour K le corps $\mathbf{Q}_p$ (p étant la caractéristique résiduelle de k), et pour L la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-représentations de Γ qui ont une «décomposition de Hodge» au sens de Tate (Driebergen). La catégorie L est saturée. Le groupe G_L correspondant est fort intéressant [du moins pour le rédacteur — les auditeurs du Collège, qui l'ont subi pendant trois mois, sont peut-être d'un avis différent].

§5. Groupes compacts et groupes complexes

Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

5.1. Algébricité des groupes compacts

Proposition 1. *Soit K un groupe compact, opérant linéairement et continûment sur un espace vectoriel réel V de dimension finie. Toute orbite de K dans V est fermée pour la topologie de Zariski de V* (relativement à $\mathbf{R}$).

Soit $x \in V$, et soit y un point de V n'appartenant pas à l'orbite Kx de x. Il nous faut construire une fonction polynomiale P sur V qui soit nulle sur Kx et non nulle en y. L'existence d'une telle fonction résulte du lemme plus précis suivant: