

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1993)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÈBRES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: §3
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60413>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 22.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

b) On suppose que K est un anneau de Dedekind. Montrer que tout comodule E de type fini est quotient d'un comodule F qui est projectif de type fini. (Utiliser a) en prenant pour V un module libre de sorte que F soit sans torsion.)

§2

1) Soit $x \in C$ tel que $d_E(x) = x \otimes x$ et $e(x) = 1$. On note K_x le module K muni de la structure de comodule définie par

$$y \mapsto x \otimes y.$$

Prouver l'équivalence des propriétés suivantes:

- a) K_x est le seul objet simple de Com_C^f (à isomorphisme près).
- b) Toute sous-cogèbre de C non réduite à 0 contient x .
- c) Le comodule C est extension essentielle du sous-comodule Kx (i.e. tout sous-comodule de C différent de 0 contient x).
- d) L'algèbre profinie A duale de C est un anneau local d'idéal maximal le noyau de l'homomorphisme $a \mapsto \langle x, a \rangle$ de A dans K .

[Noter que c) signifie ceci: le comodule C est l'enveloppe injective du comodule simple Kx .]

§3

1) Avec les notations du n° 3.4, montrer sans utiliser la prop. 4 que la formule (iii) est conséquence des formules (i) et (ii).

2) Les notations étant celles du n° 3.4, on suppose K parfait. Soit g un automorphisme du foncteur ν . Pour tout objet E de Com_C^f , soit s_E (resp. u_E) la composante semi-simple (resp. unipotente) de $g(E)$. Montrer que $E \mapsto s_E$ et $E \mapsto u_E$ sont des automorphismes du foncteur ν . Si g vérifie les relations (i) et (ii), montrer qu'il en est de même pour s et u . Dédire de là la décomposition des éléments de $G(K)$ en produits d'éléments semi-simples et unipotents commutant entre eux (dans le cas où G est un schéma en groupes).

Utiliser le même procédé pour obtenir la décomposition des éléments de l'algèbre de Lie de G en sommes d'éléments semi-simples et nilpotents commutant entre eux.

[Cette décomposition n'a en fait rien à voir avec les bigèbres. On aurait pu la donner au §2.]

3) On suppose que $G = \text{Spec}(C)$ est un schéma en groupes. Prouver l'équivalence des propriétés suivantes:

- a) Tout G -module simple est isomorphe au G -module trivial K .
- b) G est limite projective de groupes algébriques linéaires unipotents.
- c) Si $E \in \text{Com}_C^f$, $K_1 \in \text{Alg}_K$, et $u \in G_E(K_1)$, l'élément u est unipotent.

4) On suppose K de caractéristique zéro. Montrer que la catégorie des G -modules semi-simples vérifie les conditions du corollaire à la prop. 3, donc correspond à un quotient H de G . Montrer que l'on peut caractériser H comme le plus grand quotient de G qui soit *réductif* (i.e. limite projective de groupes algébriques linéaires réductifs, au sens usuel).

§4

1) On prend $K = \mathbf{C}$. Le groupe additif $\Gamma = \mathbf{C}$ est considéré comme un groupe de Lie complexe. Soit G son enveloppe, et soit C la bigèbre correspondante.

a) Montrer qu'une fonction $f(z)$ sur Γ appartient à C si et seulement si c'est une *exponentielle-polynôme*, i.e. si elle est combinaison linéaire de fonctions de la forme $z^n e^{\lambda z}$, avec $n \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

b) Montrer que C est produit tensoriel de la bigèbre formée des polynômes, et de la bigèbre formée des combinaisons linéaires d'exponentielles. Interpréter cette décomposition comme une décomposition de l'enveloppe G en produit du groupe *additif* G_a et d'un *groupe de type multiplicatif* M dual du groupe abélien \mathbf{C} . En particulier, G n'est pas algébrique.

2) Comment faut-il modifier l'exercice précédent lorsque $K = \mathbf{R}$ et $\Gamma = \mathbf{R}$? (La partie «tore» de G n'est plus déployée; son dual est \mathbf{C} , muni de la conjugaison complexe.)

(Dans les deux exercices ci-après, on se permet d'identifier un groupe profini Γ à son enveloppe relativement à la catégorie des Γ -modules à noyau