

## 1.2. Jacobi forms

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **39 (1993)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

tions  $F: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathbf{C}$  satisfying  $F(M \langle Z \rangle) = \det(CZ + D)^k F(Z)$  for all  $M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_2$ . Such a function has a Fourier expansion

$$F(Z) = \sum_{T = T' \geq 0} a(T) e^{2\pi i \operatorname{tr}(TZ)}$$

where  $T$  runs over all positive semi-definite half-integral  $(2, 2)$ -matrices. We write  $S_k(\Gamma_2)$  for the subspace of cusp forms (require  $a(T) = 0$  for  $T \not\geq 0$ ).

For  $F, G \in S_k(\Gamma_2)$  we denote by

$$\langle F, G \rangle = \int_{\Gamma_2 \backslash \mathcal{H}_2} F(Z) \overline{G(Z)} (\det Y)^{k-3} dX dY \quad (X = \operatorname{Re}(Z), Y = \operatorname{Im}(Z))$$

the Petersson scalar product of  $F$  and  $G$ .

For basic facts on Siegel modular forms we refer to [12, 17].

## 1.2. JACOBI FORMS

We write  $\mathcal{H}$  for the complex upper half-plane. We let  $H(\mathbf{R})$  be the Heisenberg group, i.e. the set of triples  $((\lambda, \mu), \kappa) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$  with group law  $((\lambda, \mu), \kappa) ((\lambda', \mu'), \kappa') = ((\lambda + \lambda', \mu + \mu'), \kappa + \kappa' + \lambda\mu' - \lambda'\mu)$ , and denote by  $G^J := SL_2(\mathbf{R}) \times H(\mathbf{R})$  the Jacobi group where  $SL_2(\mathbf{R})$  operates on  $H(\mathbf{R})$  from the right by  $((\lambda, \mu), \kappa)M = ((\lambda, \mu)M, \kappa)$ . The group  $G^J$  acts on  $\mathcal{H} \times \mathbf{C}$  by

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ((\lambda, \mu), \kappa) \right) \circ (\tau, z) = \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z + \lambda\tau + \mu}{c\tau + d} \right).$$

We set  $\Gamma_1 := SL_2(\mathbf{Z})$ ,  $\Gamma_1^J := \Gamma_1 \times H(\mathbf{Z})$  and for  $k \in \mathbf{Z}$  and  $m \in \mathbf{N}_0$  denote by  $J_{k,m}$  the space of Jacobi forms of weight  $k$  and index  $m$  on  $\Gamma_1^J$ , i.e. the space of holomorphic functions  $\phi: \mathcal{H} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  satisfying the transformation formula

$$\phi(\gamma \circ (\tau, z)) = (c\tau + d)^k \exp \left( 2\pi i m \left( \frac{c(z + \lambda\tau + \mu)^2}{c\tau + d} - \lambda^2\tau - 2\lambda z \right) \right) \phi(\tau, z)$$

for all  $\gamma = \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ((\lambda, \mu), \kappa) \right) \in \Gamma_1^J$  and having a Fourier expansion

$$\phi(\tau, z) = \sum_{n, r \in \mathbf{Z}, r^2 \leq 4mn} c(n, r) q^n \zeta^r$$

where  $q = e^{2\pi i \tau}$ ,  $\zeta = e^{2\pi i z}$ . We write  $J_{k,m}^{\text{cusp}}$  for the subspace of cusp forms (require  $c(n, r) = 0$  for  $r^2 = 4mn$ ). Note that the coefficients  $c(n, r)$  depend

only on the discriminant  $D := r^2 - 4mn$  and the residue class  $r \pmod{2m}$ .

The Petersson scalar product on  $J_{k,m}^{\text{cusp}}$  is normalized by

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Gamma_1^J \backslash \mathcal{H} \times \mathbb{C}} \phi(\tau, z) \overline{\psi(\tau, z)} \exp(-4\pi m y^2 / \nu) \nu^{k-3} du dv dx dy$$

$$(\tau = u + iv, z = x + iy).$$

For basic facts about Jacobi forms we refer to [9].

## §2. THE MAASS SPACE

### 2.1. RESULTS

Let  $F$  be a Siegel modular form of integral weight  $k$  on  $\Gamma_2$  and write the Fourier expansion of  $F$  in the form

$$(1) \quad F(Z) = \sum_{m \geq 0} \phi_m(\tau, z) e^{2\pi i m \tau'} \quad \left( Z = \begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2 \right).$$

Using the injection

$$(2) \quad \Gamma_1^J \rightarrow \Gamma_2, \quad \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, ((\lambda, \mu), \kappa) \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & b & \mu \\ \lambda' & 1 & \mu' & \kappa \\ c & 0 & d & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where  $(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , and the transformation formula of  $F$  it is easy to see that the functions  $\phi_m$  are in  $J_{k,m}$ . The expansion (1) is referred to as the Fourier-Jacobi expansion of  $F$ .

Thus for any  $m \in \mathbf{N}_0$  we obtain a linear map

$$(3) \quad \rho_m : M_k(\Gamma_2) \rightarrow J_{k,m}, \quad F \mapsto \phi_m.$$

Note that  $\rho_0$  is equal to the Siegel  $\Phi$ -operator.

We shall be interested in the case  $m = 1$ . For  $k$  odd,  $\rho_1$  is the zero map; in fact, any Jacobi form of odd weight and index one must vanish identically as is easily seen.

For  $k$  even,  $\rho_1$  was studied in detail by Maass [28, 29] who showed the existence of a natural map  $V : J_{k,1} \rightarrow M_k(\Gamma_2)$  such that the composite  $\rho_1 \circ V$  is the identity. More precisely, let  $\phi \in J_{k,1}$  with Fourier coefficients  $c(n, r)$  ( $n, r \in \mathbf{Z}; r^2 \leq 4n$ ) and for  $m \in \mathbf{N}_0$  define